УДК 66.067-9

Пакки Г.В., Ульев Л.М.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА НА ПОРИСТОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ УСЛОВИИ ОТСОСА

Введение

В настоящее время во многих технических приложениях используется отсос газа или жидкости через проницаемые поверхности. Отсос находит применение для управления пограничным слоем и снижения аэродинамического сопротивления путем затягивания перехода ламинарного режима движения в турбулентный. Процессы переноса вещества через стенку, аналогичные отсосу и вдуву, имеют место при наличии физико-химических превращений на поверхности обтекаемых тел (абляция, испарение, конденсация, сублимация, сепарация, фильтрование, мембранное разделение и т.д.) [1]. Гидродинамике на проницаемых поверхностях также посвящен ряд монографий [2, 3, 4, 5, 6].

Также активно в последнее время используются в технических приложениях закрученные потоки. Появилось значительное количество монографий, статей и обзоров, посвященных исследованию закрученных потоков. [7, 8]

Закрученный поток в осесимметричных каналах относится к группе пространственных течений в поле центробежных массовых сил. Закрутка потока создается специальными устройствами (завихрителями), которые расположены на входе в канал и придают потоку вращательную составляющую скорости [7].

Основная особенность закрученного потока – это соизмеримое отношение двух (осевой и тангенциальной), а в некоторых случаях и трех составляющих скорости, а также наличие поперечного (радиального) и продольного (осевого) градиентов давления.[8]

Местная закрутка потока широко используется во многих технических устройствах для организации и интенсификации различных процессов.

Изучение внутренних закрученных потоков имеет большое значение для теории трехмерного пограничного слоя. Наличие двух компонент напряжения трения, а также сходство свойств пристенного закрученного течения и пространственного пограничного слоя позволяет считать закрученный поток промежуточной стадией в разработке теории трехмерного пограничного слоя [7].

Постановка задачи

В статье рассматривается пограничный слой на пористой цилиндрической поверхности при условии отсоса закрученного потока жидкости с постоянными значениями продольной и тангенциальной (вращательной) компонент скорости на наружной границе пограничного слоя. Граничные условия на поверхности пористого цилиндра определены как постоянная радиальная составляющая скорости (отсос), и нулевые значения по продольной и тангенциальной составляющим скорости (без условия проскальзывания). Граничные условия на внешней границе пограничного слоя, исходя из конструктивных особенностей, определяются следующим образом: радиальная составляющая скорости определяется как приток жидкости через наружную поверхность пограничного слоя; тангенциальная и продольная составляющие постоянны по всей наружной границе пограничного слоя.

Решение

Общая система уравнений для вязкой несжимаемой жидкости [9]:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 V_r-\frac{V_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+\frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}+V_z\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}+\frac{V_rV_\varphi}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\nabla^2 V_\varphi-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}-\frac{V_\varphi}{r^2}\right); \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 V_z; \tag{3}$$

$$\frac{\partial (rV_r)}{\partial r}+\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial (rV_z)}{\partial z}=0; \quad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Учитываем стационарность и осесимметричность:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2}\right); \tag{5}$$

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \nu\left(\nabla^2 V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2}\right); \tag{6}$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 V_z\,; \tag{7}$$

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} = 0\,;\quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{8}$$

Учитываем безградиентное течение:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = \nu\left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2}\right); \tag{9}$$

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \nu\left(\nabla^2 V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2}\right); \tag{10}$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nu\nabla^2 V_z\,; \tag{11}$$

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} = 0\,;\quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{12}$$

Граничные условия в пограничном слое:

$V_r\big|_{r=R} = V_f = const;\quad V_\varphi\big|_{r=R} = 0;\quad V_z\big|_{r=R} = 0$ – на пористой поверхности фильтра

$V_r\big|_{r=R+\delta} = \dfrac{V_f \cdot R}{R+\delta} = const;\quad V_\varphi\big|_{r=R+\delta} = const;\quad V_z\big|_{r=R+\delta} = const$ – на границе ламинарного пограничного слоя.

Рассмотрим вариант, когда первые и вторые производные по z равны нулю. То есть компоненты скорости не зависят от z.

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = \nu\left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2}\right); \tag{13}$$

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \nu\left(\nabla^2 V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2}\right); \tag{14}$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = \nu\nabla^2 V_z\,; \tag{15}$$

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0\,;\quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,. \tag{16}$$

Уравнение для радиальной составляющей скорости:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = \nu\left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2}\right) \to V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\right) \to \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{V_r}{\nu}\right)\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} = 0\,. \tag{17}$$

Из уравнения неразрывности следует:

$$\frac{\partial\left(rV_r\right)}{\partial r}=0\rightarrow V_r=\frac{V_f\cdot R_f}{r}, \qquad (18)$$

где V_f – радиальная составляющая скорости (скорость фильтрации) на наружной поверхности пористого цилиндра, м/с; R_f – наружный радиус пористого цилиндра, м; r – радиус от оси цилиндра, м

Уравнение для тангенциальной (вращательной) составляющей скорости:

$$V_r\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+\frac{V_rV_\varphi}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2V_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}-\frac{V_\varphi}{r^2}\right)\rightarrow\frac{\partial^2V_\varphi}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{V_r}{\nu}\right)\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{V_r}{\nu\cdot r}\right)V_\varphi=0; \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2V_\varphi}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{V_r}{\nu}\right)\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{V_r}{\nu\cdot r}\right)V_\varphi=0\rightarrow\frac{\partial^2V_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left(1-\frac{V_f\cdot R_f}{\nu}\right)\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{V_f\cdot R_f}{\nu}\right)V_\varphi=0; \qquad (20)$$

$$\frac{d^2V_\varphi}{\partial r^2}r^2+\left(1-\frac{V_f\cdot R_f}{\nu}\right)\frac{dV_\varphi}{\partial r}r-\left(1+\frac{V_f\cdot R_f}{\nu}\right)V_\varphi=0. \qquad (21)$$

Решением дифференциального уравнения (21) будет [10]

$$V_\varphi=C_1\,r^{\mathrm{Re}+1}+C_2\,r^{-1}, \qquad (22)$$

где $\mathrm{Re}=\dfrac{V_f\,R_f}{\nu}$ – по своей структуре является числом Рейнольдса радиального потока.

Постоянные интегрирования находим, исходя из граничных условий: при $r=R_f$; $V_\varphi=0$; при $r=R_f+\delta$; $V_\varphi=V_{\varphi1}$. Здесь R_f – наружный радиус пористого цилиндра; $r=R_f$; $V_\varphi=0$; δ – толщина пограничного слоя или расстояние от поверхности пористого цилиндра до вращающихся лопастей или проницаемого цилиндра, определяющих поле скоростей на границе пограничного слоя.

Тогда

$$C_1=-\frac{V_{\varphi1}(R_f+\delta)}{(R_f+\delta)^{\mathrm{Re}+2}-R_f^{\mathrm{Re}+2}}; \qquad (23)$$

$$C_2=\frac{V_{\varphi1}(R_f+\delta)\,R_f^{\mathrm{Re}+2}}{(R_f+\delta)^{\mathrm{Re}+2}-R_f^{\mathrm{Re}+2}}. \qquad (24)$$

В выражение (22) подставляем (23) и (24)

$$V_\varphi=-\frac{V_{\varphi1}(R_f+\delta)}{(R_f+\delta)^{\mathrm{Re}+2}-R_f^{\mathrm{Re}+2}}\cdot r^{\mathrm{Re}+1}+\frac{V_{\varphi1}(R_f+\delta)\,R_f^{\mathrm{Re}+2}}{(R_f+\delta)^{\mathrm{Re}+2}-R_f^{\mathrm{Re}+2}}\cdot r^{-1}. \qquad (25)$$

Для определения V_φ в уравнении (25) необходимо знать величину $V_{\varphi1}$. Значение $V_{\varphi1}$ можно определить исходя из граничного условия на внешней границе пограничного слоя. В рассматриваемом случае благодаря принудительной закрутке с постоянной скоростью на границе пограничного слоя $V_{\varphi1}=\mathrm{const}$. В общем случае для аппаратов с определенной геометрией и местной закруткой нами экспериментально определена тангенциальная составляющая скорости $V_{\varphi\delta}$ на внешней границе пограничного слоя в следующем виде:

а) прямоток

$$V_{\varphi\delta}=V_0\cdot\cos\varphi_0\cdot\exp\left(-2\sqrt{\frac{D}{D-2R_f}}\cdot\frac{z^2}{L^2}\right); \qquad (26)$$

б) противоток

$$V_{\varphi\delta} = V_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{D}{D-2R_f}} \cdot \frac{z^2}{L^2}\right) \cdot \left[1-\left(1-\cos\varphi_0\right) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{D}{D-2R_f}} \cdot \frac{z^2}{L^2}\right)\right], \qquad (27)$$

где V_0 – величина скорости потока при сходе с лопаток завихрителя; φ_0 – угол схода потока с лопаток завихрителя; D – внутренний диаметр наружного цилиндра кольцевой полости; z – продольная координата; L – длина внутреннего проницаемого цилиндра.

Уравнение для продольной составляющей скорости:

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(1-\frac{V_f \cdot R_f}{\nu}\right)\frac{\partial V_z}{\partial r} = 0; \qquad (28)$$

$$\frac{d^2 V_z}{dr^2} \cdot r + \left(1-\frac{V_f \cdot R_f}{\nu}\right)\frac{dV_z}{dr} = 0. \qquad (29)$$

Решением дифференциального уравнения (29) будет [11]

$$V_z = \frac{C_3}{\mathrm{Re}} r^{\mathrm{Re}} + C_4, \qquad (30)$$

где $\mathrm{Re} = \dfrac{V_f\, R_f}{\nu}$ – по своей структуре является числом Рейнольдса радиального потока.

Постоянные интегрирования находим, исходя из граничных условий: при $r = R_f$; $V_z = 0$; при $r = R_f + \delta$; $V_z = V_{z1}$. Здесь R_f – наружный радиус пористого цилиндра; δ – толщина пограничного слоя или расстояние от поверхности пористого цилиндра до вращающихся лопастей или проницаемого цилиндра, определяющих поле скоростей на границе пограничного слоя.

Тогда

$$C_3 = \frac{V_{z1} \cdot \mathrm{Re}}{(R_f + \delta)^{\mathrm{Re}} - R_f^{\mathrm{Re}}}; \qquad (31)$$

$$C_4 = -\frac{V_{z1} \cdot R_f^{\mathrm{Re}}}{(R_f + \delta)^{\mathrm{Re}} - R_f^{\mathrm{Re}}}. \qquad (32)$$

В выражение (30) подставляем (31) и (32)

$$V_z = \frac{V_{z1}}{(R_f + \delta)^{\mathrm{Re}} - R_f^{\mathrm{Re}}} \cdot r^{\mathrm{Re}} - \frac{V_{z1} \cdot R_f^{\mathrm{Re}}}{(R_f + \delta)^{\mathrm{Re}} - R_f^{\mathrm{Re}}}. \qquad (33)$$

Для определения V_z в уравнении (33) необходимо знать величину V_{z1}. Значение V_{z1}. можно определить исходя из граничного условия на внешней границе пограничного слоя. В рассматриваемом случае благодаря принудительной закрутке с постоянной скоростью на границе пограничного слоя $V_{z1} = \mathrm{const}$. В общем случае для аппаратов с определенной геометрией и местной закруткой нами экспериментально определена тангенциальная составляющая скорости $V_{z\delta}$ на внешней границе пограничного слоя в следующем виде:

а) прямоток

$$V_{z\delta} = V_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{D}{D-2R_f}} \cdot \frac{z^2}{L^2}\right) \cdot \left[1-\left(1-\sin\varphi_0\right) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{D}{D-2R_f}} \cdot \frac{z^2}{L^2}\right)\right]; \qquad (34)$$

б) противоток

$$V_{\varphi\delta} = V_0 \cdot \sin\varphi_0 \cdot \exp\left(-2\sqrt{\frac{D}{D-2R_f}} \cdot \frac{z^2}{L^2}\right). \tag{35}$$

Таким образом, совокупность выражений (33), (34) и (35) полностью определяют поле скоростей в пограничном слое на поверхности пористого цилиндра.

Заключение

В статье решена задача определения поля скоростей ламинарного пограничного слоя закрученного потока жидкости на пористом цилиндре при условии отсоса. Граничные условия на внешней границе пограничного слоя, исходя из конструктивных особенностей, определяются следующим образом: радиальная составляющая скорости определяется как приток жидкости через наружную поверхность пограничного слоя; тангенциальная и продольная составляющие постоянны по всей наружной границе пограничного слоя. Получены аналитические выражения для радиальной, тангенциальной и продольной составляющих скорости жидкости в пограничном слое на поверхности пористого цилиндра. Полученное решение будет использовано для анализа сеперационных характеристик фильтрующих элементов при разделении закрученных потоков суспензий.

Литература

1. Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М,: Наука, 1984.

2. Басин А.М., Короткин А.И., Козлов Л.Ф. Управление пограничным слоем судна: (Основные проблемы). Л.: Судостроение, 1968. 492 с.

3. Васильев Л.Л., Боброва Г.И., Танаева С.А. Пористые материалы в криогенной технике. Минск: Наука и техника, 1979. 224 с.

4. Козлов Л.Ф. Ламинарный пограничный слой при наличии отсасывания. Киев: Наукова думка, 1968. 196 с.

5. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М,.: Энергия.– 1972.– 342 с.

6. Романенко П.Н. Гидродинамика и тепломассообмен в пограничном слое: (справочник). М,: Энергия. 1974. 464 с.

7. Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил: в 4-х т.–Киев: Ин-т техн. Теплофизики НАН Украины, 2000.

8. Терновский И.Г., Кутепов А.М. Гидроциклонирование. – М.: Наука, 1994. – 350 с.

9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М,: Наука. – 1978. – 736 с.

10. Склабинский В.И. Расчет гидродинамики вихревого распыливающего противоточного массообменного аппарата // Экотехнологии и ресурсосбережение. – 1998. – № 44. С. 52–55.

11. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.// М.: Наука. – 1966.

УДК 66.067–9

Паккі Г.В., Ульєв Л.М.

ЛАМІНАРНИЙ ПОГРАНИЧНИЙ ШАР ЗАКРУЧЕНОГО ПОТОКУ НА ПОРИСТОМУ ЦИЛІНДРІ ЗА УМОВИ ВІДСМОКТУВАННЯ

Визначено поле швидкостей пограничного шару закрученого потоку рідини на пористому циліндрі при умові відсмоктування. Отримані залежності для компонент швидкості від граничних умов на поверхні пористого циліндру та на зовнішній межі пограничного шару.

Pakki G.V., Ulyev L.M.

LAMINAR BOUNDARY LAYER OF SWIRLED FLOW ON POROUS CYLINDER WITH SUBJECT SUCTION

Determined the velocity field of the boundary layer of swirling flow on a porous cylinder subject to suction. The dependencies for the components of liquid velocity on the boundary conditions on the surface of the porous cylinder and exterior boundary layer.