УДК: 681.511.4

Подустов М.А., Бобух А.А., Ковалёв Д.А.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## Введение

В настоящее время важным этапом при создании высокоэффективных компьютерно-интегрированных систем управления технологическими процессами (КИСУ ТП) является разработка математических моделей технологических процессов. Одна из основных трудностей, возникающих при построении математических моделей современных производств, состоит в решении задачи идентификации [1–3] в «широком» смысле. Под этим термином понимается процедура, состоящая из двух этапов:

а) определение рационального вида оператора связи входов и выходов системы – задача выбора оптимальной (псевдооптимальной) структуры;

б) оценка параметров полученного на первом этапе уравнения – параметрическая идентификация.

Для хорошо изученных линейных динамических систем вид оператора связи входов и выходов системы, как правило, априори известен, поэтому для решения задачи идентификации в «широком» смысле остается решить задачу параметрической идентификации, достаточно хорошо описанную в литературе [1–2].

Иначе обстоит дело с нелинейными динамическими системами, априорная информация о которых невелика. В этом случае при решении задачи первого этапа возникают значительные трудности, связанные с необходимостью выбора вида оператора связи $A$ входов и выходов исследуемой системы из множества операторов $W_A$ некоторого типа.

## Цель работы

Разработка алгоритма выбора псевдооптимальной структуры нелинейных динамических систем, позволяющего при большой размерности конечного множества операторов $W_A$ в значительной степени сократить время на ее поиск.

## Основная часть

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, которая описывается уравнением:

$$x = A(x,U), \tag{1}$$

где $x$ – скалярный выход системы; $A$ – оператор, подлежащий определению, и, по нашему предположению, $A \in W_A$, где $W_A$ – заданное множество операторов; $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_l \end{pmatrix}$ – вектор входов системы размерностью $l \times I$.

При условии, что нам известен класс операторов $W_A$ можно, подобно [1–3] ввести аппроксимацию оператора $A$:

$$A(x,U) = C^T \varphi(x,U), \tag{2}$$

где $\varphi(x,U) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,U) \\ \varphi_2(x,U) \\ \vdots \\ \varphi_m(x,U) \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}$; $\varphi$ – вектор функции размерностью $m\times I$, на основе которого можно аппроксимировать с достаточной степенью точности любой из операторов $A \in W_A$; $C$ – вектор параметров размерностью $m\times I$, любые $t$ из которых ($t = \overline{1,m}$) могут отличаться от нуля, $m$-$t$ соответственно равны нулю.

Выбирая те или иные элементы $C$ ($i = \overline{1,m}$) вектора $C$ отличные от нуля, и умножая скалярно векторы $C$ и $\varphi$ мы можем получить $2^m$ различных операторов $A \in W_A$.

На основе аппроксимации (2) можно предложить две формальные постановки задачи выбора псевдооптимальной структуры нелинейной динамической системы:

1. При заданной ошибке идентификации $\varepsilon$ найти оператор $A^{opt} \in W_A$ минимальной длины, то есть составленный из минимального количества функций $\varphi_i \in \varphi$ (аргументы функций $\varphi_i$ здесь и далее будут опущены).

2. При заданной длине оператора $A^{opt} \in W_A$ определить его как оператор, обеспечивающий минимальную ошибку идентификации $\varepsilon$ по сравнению со всеми операторами такой длины [1-3].

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$x = C^T \varphi. \tag{3}$$

Для решения рассмотренной выше задачи выбора псевдооптимальной структуры примем предположение, состоящее в том, что оптимальной структуре $\varphi^{opt} \in \varphi$ соответствует максимуму значения коэффициента множественной корреляции $R_{x/\varphi^{opt}}$, то есть необходимо определить:

$$R_{x/\phi^{opt}} = \max_{\phi^j} R_{x/\phi^j}, \quad \forall \varphi^j \in \varphi, \tag{4}$$

где $\varphi^j$ – произвольное подмножество $\varphi$.

Используя это предположение и связь коэффициентов множественной и частной корреляции [3]:

$$1 - R^2_{x/\varphi} = (1-\rho^2_{x,\varphi_1})(1-\rho^2_{x,\varphi_2\cdot\varphi_1})\ldots(1-\rho^2_{x,\varphi_m\cdot\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}}), \tag{5}$$

где $\rho^2_{x,\varphi_m\cdot\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}}$ – коэффициенты частной корреляции, можно построить псевдооптимальный алгоритм выбора структуры.

Заметим, что индексация $\varphi_i$ в формуле (5) не совпадает с индексацией $\varphi_i$ в формуле (2) и означает лишь порядок занесения элементов $\varphi_i \in \varphi$ во множество фиксируемых элементов $\varphi^j \in \varphi$, где $j$ – число элементов множества $\varphi^j$.

Определим алгоритм выбора псевдооптимальной структуры рассматриваемой системы следующим образом.

Этап 1. На этом этапе (первый шаг) занесем во множество $\varphi^1$ элемент $\varphi_i \in \varphi$ для которого будет выполняться условие:

$$\left|\rho_{x,\varphi_i \cdot \varphi^k}\right| = \max_t \left|\rho_{x,\varphi_t \cdot \varphi^k}\right|, \quad \forall \varphi_t \in \varphi\ , \quad t = \overline{1,m}\,. \tag{6}$$

Затем рассмотрим коэффициент множественной корреляции $R_{x/\varphi^1}$. Если $R_{x/\varphi^1} > 1-\varepsilon$, где $\varepsilon$ – некоторая заданная ошибка идентификации, то $\varphi^1$ соответствует $\varphi^{opt}$, в противном случае переходим ко второму шагу.

Этап 2. На $k$-м шаге (при условии, что за предыдущие $k$-1 шагов $\varphi^{opt}$ не найдено) занесем во множество $\varphi^{k+1}$ элемент $\varphi_i \in \varphi$, для которого будет выполняться условие:

$$\left|\rho_{x,\varphi_i \cdot \varphi^k}\right| = \max_t \left|\rho_{x,\varphi_t \cdot \varphi^k}\right|, \quad \forall \varphi_t \notin \varphi^k\ , \quad t = \overline{1,m-k}\,. \tag{7}$$

Затем рассмотрим $R_{x/\varphi^{k+1}}$. Если $R_{x/\varphi^{k+1}} > 1-\varepsilon$ то $\varphi^{k+1}$ соответствует $\varphi^{opt}$, если нет, то необходимо перейти к $k$+1 шагу, и т.д. до тех пор, пока не будет определено $\varphi^{opt}$. Описанный выше алгоритм решает задачу выбора псевдооптимальной структуры для этапа 1, однако его легко трансформировать для решения задачи этапа 2.

Учитывая псевдооптимальность предложенного алгоритма выбора структуры нелинейной динамической системы, можно попытаться улучшить его свойства следующим образом: на первом шаге не выбирать, а жестко фиксировать во множестве $\varphi^1$ по очереди все $\varphi_i \in \varphi$ ($i = \overline{1,m}$) и затем проводить вычисления согласно рассмотренному алгоритму. Такой подход может привести (для задачи в постановке 1) к тому, что из $m$ структур с одинаковой ошибкой можно будет выбрать требуемую структуру как минимальной длины, так и, возможно, более технологически обоснованную, что значительно увеличивает шансы найти $\varphi^{opt}$.

Покажем на примерах использование алгоритма выбора псевдооптимальной структуры нелинейной динамической системы. Основная трудность, с которой мы сталкиваемся при реализации алгоритма, заключается в выборе множества $\varphi$, аппроксимирующего операторы $A \in W_A$ и некоторой заданной степенью точности. Рассмотрим различные способы выбора множества $\varphi$ в зависимости от априорной информации об исследуемой системе.

Способ 1.

Пусть по входу $u(k)$ и выходу $x(k)$ нелинейной динамической системы необходимо определить ее псевдооптимальную структуру. Такая система может быть описана нелинейными разностными уравнениями вида:

$$x(k+1) = a^T X(k) + b^T U(k), \tag{8}$$

где $X(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-n+1) \end{pmatrix}$, $\quad U(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-l+1) \end{pmatrix}$

$a^{\mathrm{T}}$, $b^{\mathrm{T}}$ –векторы размерностью $1\times m$ и $1\times l$ соответственно.

Тогда множество $\varphi$ можно задать следующим образом:

$$\varphi_i(u(k)) = u(k-i), \quad \forall_i = \overline{0, l-1};$$
$$\varphi_{l+1}(x(k)) = x(k-i), \quad \forall_i = \overline{0, n-1},$$

где $n$ и $l$ являются заданными, заведомо большими, чем истинные $n^{opt}$ и $l^{opt}$ величинами.

После того, как определен вектор (множество) $\varphi$, можно, используя алгоритм выбора псевдооптимальной структур, то есть получить $\varphi^{opt}$, а затем и $n^{opt}$ и $l^{opt}$ (описанный подход легко распространить на многомерные нелинейные динамические системы).

Способ 2.

Пусть по входам $u_i(k)$ ($i = \overline{1, l}$) и выходу $x(k)$ нелинейной динамической системы необходимо определить ее псевдооптимашьную структуру. Рассмотрим аппроксимацию исследуемой динамической системы моделью второго порядка, что практически наиболее целесообразно:

$$\tilde{o}(k+1) = a^T X(k) + b^T U(k) + X^T(k) C U(k) + X^T(k) D X(k) + U^T(k) H U(k), \tag{9}$$

где $U(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_l(k) \end{pmatrix}$, $C$, $D$, $H$ – матрицы размерностью $n\times l$, $n\times n$ и $l\times l$ соответственно.

Отсюда вектор $\varphi$ можно определить следующим образом:

$$\varphi_i(u_i(k)) = u_i(k), \quad \forall_i = \overline{1, l};$$
$$\varphi_{l+i}(x(k)) = x_i(k-i), \quad \forall_i = \overline{0, n-1},$$
$$\varphi_{l+n+i+j}(u_i(k), x(k)) = u_i(k) x(k-j), \quad \forall_i = \overline{1, l} \quad \forall_i = \overline{0, n-1},$$
$$\varphi_{l+n+l\times n+i+j}(x(k)) = x(k-i) x(k-j), \quad \forall_{i,j} = \overline{0, n-1},$$
$$\varphi_{l+n+l\times n+n\times n+i+j}(u_i(k)) = u_i(k) u_j(k), \quad \forall_{i,j} = \overline{1, l},$$

Учитывая, что $u_i(k)u_j(k)=u_j(k)u_i(k)$ и $x(k-i)x(k-j)=x(k-j)x(k-i)$, размерность вектора $\varphi$ можно уменьшить до $l+n+l\times n+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{l(l+1)}{2}$.

Получив вектор $\varphi$ и воспользовавшись алгоритмом выбора псевдооптимальной структуры, мы можем определить $\varphi^{opt}$.

Для данной задачи наглядны преимущества предложенного алгоритма. Методом прямого перебора для выбора оптимальной структуры необходимо было бы рассмотреть $2^{l+n+l\times n+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{l(l+1)}{2}}-1$ моделей, а используя алгоритм выбора псевдооптимальной структуры не более $\frac{1}{2}\left(l+n+l\times n+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{l(l+1)}{2}\right)$ моделей.

Таким образом, использование алгоритма выбора псевдооптимальной структуры даже при небольших значениях $l$ и $n$ приводит к существенной экономии машинного времени по сравнению с методом прямого перебора.

Способ 3.

Рассмотрим еще один подход к выбору псевдооптимальной структуры нелинейной динамической системы, который можно применять при почти полном отсутствии априорной информации о ней. Этот подход основывается на описании нелинейной динамической системы функциональным рядом Вольтерра:

$$\begin{gathered}x(k)=\sum_{m=0}^{\infty}k_1(m)u(k-m)+\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}k_2(m_1m_2)\,u(k-m_1)u(k-m_2)+\ldots\\ +\sum_{m_1\ldots m_S=0}^{\infty}k_S(m_1\ldots m_S)\,u(k-m_1)\ldots\,u(k-m_S)\end{gathered}, \tag{10}$$

где $x(k)$ – выход системы; $u(k)$ – вход системы.

После того как ядра $k_S$ аппроксимированы:

$$k_S(m_1\ldots m_S)=\sum_{\nu=1}^{l_S}C_{S\nu}\,\psi_\nu(m_1\ldots\,m_S), \tag{11}$$

где $\Psi_\nu$ – ортонормированные функции, и порядок ряда ограничен, например, двумя членами, вектор $\varphi$ можно определить следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi_\nu(u(k-m))=\psi_\nu(m)u(k-m),\ \ \forall_\nu=\overline{1,l},\\ \varphi_{l_1+\nu}\big(u(k-m_1)u(k-m_2)\big)=\psi_\nu(m_1\,m_2)u(k-m_1)u(k-m_2),\ \ \forall_\nu=\overline{1,l_2},\end{gathered}$$

После того как определен вектор $\varphi$, можно воспользоваться алгоритмом выбора псевдооптимальной структуры для получения $\varphi^{opt}$.

**Вывод**

Таким образом, высокое быстродействие и гибкость предложенного алгоритма выбора структуры нелинейной динамической системы по отношению к виду искомой модели позволяют использовать его для решения различных задач, возникающих при создании КИСУ ТП.

Литература

1. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации / Я.З. Цыпкин. – М. : Наука, 1995. – 336 с.

2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М. : Мир, 1975. – 680 с.

3. Бобух А.А. Компьютерно-интегрированная система автоматизации технологических объектов управления централизованным теплоснабжением: монография / А.А. Бобух, Д.А. Ковалёв. – Х. : ХНУГХ им. А.Н. Бекетова, 2013. – 226 с.

Bibliography (transliterated)

1. Tsyipkin Ya.Z. Informatsionnaya teoriya identifikatsii  Ya.Z. Tsyipkin. – M. : Nauka, 1995. – 336 p.

2. Eykhoff P. Osnovyi identifikatsii sistem upravleniya  P. Eykhoff. – M. : Mir, 1975. – 680 p.

3. Bobuh A.A. Kompyuterno-integrirovannaya sistema avtomatizatsii tehnologicheskih ob'ektov upravleniya tsentralizovannyim teplosnabzheniem: monografiya  A.A. Bobuh, D.A. Kovalyov. – H. : HNUGH im. A.N. Beketova, 2013. – 226 p.

УДК: 681.511.4

Подустов М.О., Бобух А.О., Ковальов Д.О.

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У статті запропоновано алгоритм вибору структури нелінійної динамічної системи по відношенню до виду шуканої моделі, що дозволяє використати його для вирішення різних завдань, що виникають при створенні комп'ютерно-інтегрованих систем керування технологічними процесами.

Podustov M. A., Bobukh A. A., Kovalyov D. A.

## MODELLING OF PROCESSES OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

In article the algorithm of a choice of structure of nonlinear dynamic system in relation to a type of required model allowing to use it for the solution of the various tasks arising at creation is offered is computer the integrated control systems of technological processes.