ІСТОРІЯ МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 519.7 (09)

Андреев Ю.М., д-р техн. наук; Ларин А.А., канд. техн. наук

МЕТОД СТРУКТУРНЫХ МАТРИЦ В МЕХАНИКЕ МАШИН (ИСТОРИЯ ВОПРОСА)

Введение. Среди моделей, использующихся в инженерной и научной практике для проведения статических, кинетостатических и динамических расчетов, широкое применение нашли дискретные модели. Они используют, как правило, минимальное число степеней свободы и отражают, поэтому, наиболее существенные механические свойства реальных объектов. Такие модели позволяют рассмотреть в рамках одной постановки очень сложные взаимодействия частей механической системы, с учетом различных связей, в том числе нестационарных и неголономных. Дискретные модели, состоящие из абсолютно твердых тел с учетом их упругих и диссипативных взаимодействий целесообразно рассматривать на первом этапе решения задач динамической прочности. Такие модели позволяют вполне адекватно моделировать условия эксплуатации различных деталей механизмов и машин и получить значения действующих в них сил. Дальнейшее решение задачи, т.е. определение напряжений и деформаций, может быть получено с помощью уточненных континуальных или конечноэлементных моделей. Большое значение здесь также имеет возможность составления универсальных дискретных механических моделей, чтобы, используя их, решить комплекс задач анализа и синтеза.

На протяжении многих лет исследователи могли применять либо ручной счет, либо графические методы расчетов. В 1940-е гг. появились методы исследования, основанные на применении электромеханических аналогий. Но только применение компьютеров позволило справиться с трудностями проведения расчетов и существенно повысить порядок рассматриваемых систем. После этого на первое место вышли проблемы построения математических моделей, т.е. составление уравнений равновесия или движения, адекватно отражающих основные свойства механических систем. Особенно большие трудности вызывает составление моделей, описывающих поведение пространственных конструкций, в которых реализуется общий случай движения твердого тела, или систем со сложными видами связей – неудерживающими, нестационарными, неголономными. Дальнейшее развитие вычислительной техники позволило и эту функцию доверить компьютеру. Автоматизированное построение дискретных моделей имеет более чем сорокалетнюю историю. В данной статье дается ретроспективный взгляд на эту проблему, и рассматриваются перспективы ее развития. О том, что указанная проблема представляет научный интерес, свидетельствует множество научно-технических конференций, которые проводились в СССР и России под патронатом Института прикладной математики им. М. В. Келдыша в период с 1980 г. по настоящее время [1].

Анализ литературных источников. Решению указанных задач посвящена обширная литература. Достаточно подробно история использования аналитических вычислений в задачах механики изложена в работах М. В. Грошевой, Г. Б. Ефимова и В. В. Самсонова [1, 2, 3]. Работа [1] посвящена истории развития символьных, аналитических преобразований на ЭВМ в Советском Союзе - систем аналитических вычислений (CAB), в современной терминологии – систем компьютерной алгебры – СКА. В статье [3] перечисляются системы компьютерной алгебры, разработанные в СССР и постсоветских государствах.

Одной из первых CAB, реализованной в конце 1960-х гг., была система АНАЛИТИК, созданная под руководством академика В. М. Глушкова и реализованная на достаточно примитивных, с современных позиций, ЭВМ типа МИР-2 [4]. Эта система успешно применялась представителями Киевской школы нелинейной механики Ю. А. Митропольским и А. А. Молчановым при исследовании нелинейных колебаний с помощью метода осреднения [5].

В книге [2, с. 33–36] упоминается CAB КИДИМ, предназначенная для решения задач статики, кинематики и самых разнообразных задач динамики дискретных механических систем. Созданием данной системы занимались в Харьковском политехническом институте под руководством профессора Л. И. Штейнвольфа с 1970-х гг.

Первым шагом в создании специальной СКА, предназначенной для проведения всевозможных расчетов механических систем была автоматизация ввода исходных данных для решения задачи о крутильных колебаниях валопроводов, описываемых моделью в виде линейной цепной системы. Дифференциальные уравнения колебаний подобных систем легко записываются в прямой форме и представляют собой матричное уравнение

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{I}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – матрицы соответственно инерции, демпфирования и жесткости, компонентами которых будут инерционные, диссипативные и упругие коэффициенты, $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{Q}(t)$ – матрицы-столбцы (векторы), соответственно обобщенных координат, обобщенных скоростей, обобщенных ускорений и возмущающих обобщенных сил. Ввод исходных данных при рассмотрении системы, имеющей несколько десятков степеней свободы, требует выполнения некоторой работы по заполнению матриц инерции, демпфирования и жесткости.

В статье [6] Л. И. Штейнвольфом и В. Н. Митиным впервые вводится термин «структурная матрица» с целью формального описания структуры линейных цепных систем, в том числе и разветвленных. Для построения структуры приведенной крутильной системы последняя разбивается на элементарные звенья, представляющие собой абсолютно жесткий диск с моментом инерции J_k с присоединенной к нему безынерционной упругой крутильной пружинкой с крутильной жесткостью C_k. Исходными данными являются векторы моментов инерции – $\mathbf{j} = \{J_i\}$, крутильных жесткостей – $\mathbf{c} = \{c_k\}$ и коэффициентов демпфирования на массах и участках – $\mathbf{b} = \{b_i^м, b_k^у\}$. Кроме этого задается последовательность соединения элементов в виде массива чисел размерности $2 \times s$, так называемой матрицы индексов. На основе последней строится матрица структуры модели $\mathbf{S}$ размерности, kxs, где s – число степеней свободы системы. Кроме того, строится вектор, определяющий знаки упругих сил или моментов в полученных уравнениях. По данной последовательности строится структурная матрица, которая для приведенной системы будет состоять только из нулей и единиц, взятых со знаком «+» или «-». Фактически структурная матрица здесь показывает только порядок соединения элементов.

С использованием структуры модели матрицы инерции, демпфирования и жесткости системы уравнений (1) запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I} = \left[\mathbf{j}\right]; \\
&\mathbf{B} = \mathbf{S}^T \left[\mathbf{b}^{у}\right]\mathbf{S} + \left[\mathbf{b}^{м}\right]; \\
&\mathbf{C} = \mathbf{S}^T \left[\mathbf{c}\right]\mathbf{S};
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Здесь квадратные скобки обозначают диагональную матрицу размерности $s \times s$, содержащую по диагонали компоненты соответствующего s-мерного вектора в T – символ транспонирования. С помощью данного подхода были созданы программы расчета свободных и вынужденных колебаний цепных дискретных систем, в том числе и нелинейных, с автоматизированным составлением дифференциальных уравнений колебаний. Эти программы на протяжении ряда лет применялись для расчетов крутильных колебаний танковых и транспортных силовых установок, выполняемых в рамках хоздоговорных работ с Харьковским заводом транспортного машиностроения им. В. А. Малышева [7, 8].

Следует отметить, что этот подход ненамного облегчал ввод исходных данных в память ЭВМ, поскольку все равно требовал построения приведенной крутильной системы и определения ее параметров, а также моментов возбуждения, которое проводилось за рамками данной программы. Однако этот первый шаг все же оказался достаточно важным, поскольку применение аппарата структурных матриц для консервативных систем позволило уточнить ряд теорем теории колебаний, касающихся спектральных свойств дискретных систем [9].

Дальнейшее развитие метод структурных матриц получил в работе [10] для плоских линейных систем произвольного вида. При составлении уравнений движения данная система разбивается на инерционные, диссипативные, упругие и силовые элементы. Каждый из них имеет наименование, значение (характеристику), координату и структуру. Последняя задается аналитическим выражением координаты элемента от обобщенных координат системы. Это позволило полностью автоматизировать получение структурных матриц, на их основе – динамических матриц инерции, упругости и диссипации сколь угодно сложных плоских систем. Однако трудности появляются при составлении вручную матриц инерционной, диссипативной и упругой структур для пространственно движущихся систем. Предложенное описание дискретных механических моделей оказалось столь эффективным, что впоследствии удалось распространить его на случай нестационарных и неголономных систем введением понятия дифференциальных структур [11, 12]. Эти структуры выражают дифференциальные, кинематические зависимости линейных и угловых скоростей звеньев системы от обобщенных скоростей (или, более общо, псевдоскоростей) и обобщенных координат. Удалось доказать практически важный результат в области чувствительности частот свободных колебаний от дискретных параметров системы [13]. Такие обобщения понятий «структура» и «структурная матрица» на случай кинематических связей [14, 15] позволили включить в круг рассматриваемых систем пространственные голономные и неголономные системы.

К понятию структурных матриц в трактовке Штейнвольфа и Митина [6] примыкает понятие «матрица инцидентности», введенная Й. Виттенбургом [16, с. 107]. Однако для ее получения надо сначала иметь нарисованный граф механической системы. Нельзя не отметить здесь фундаментальную работу В. В. Величенко [17], где дается геометрический смысл понятия «структурная матрица», называемая там «матрица касательного базиса». Аналогичное рассматриваемому, следует трактовать и направление работ В. А. Коноплева [18]. Сюда же примыкают и уравнения Кана [19]. Несмотря на фундаментальную проработанность и законченность упомянутых исследований [1, 16–18], у них отсутствует единый подход для получения математической модели с учетом связей любого вида в обобщенных и псевдокоординатах.

Цель статьи. Выявить общее в трактовке понятия «структура» и «структурная матрица», данное различными авторами, продемонстрировать путем небольшого расширения этого понятия возможность выработки эффективной общей методики получения уравнений движения и равновесия дискретных систем произвольной сложности со связями любого типа в удобных исследователю физических и геометрических переменных, в том числе псевдокоординатах.

Сущность метода и его развитие. В качестве базового принципа, на основе которого получены аналитические алгоритмы, использовано общее уравнение механики (принцип д'Аламбера–Лагранжа). Рассматриваются системы взаимодействующих твердых тел с конечным числом степеней свободы с геометрическими и кинематическими, голономными и неголономными стационарными и нестационарными удерживающими связями. С точки зрения вибрационных задач специально выделяются линейные силы упругости и диссипации.

Предложено описывать инерционные, силовые, диссипативные и упругие свойства дискретной механической системы совокупностью инерционных, силовых, диссипативных и упругих элементов [11]. Каждый такой элемент отображается в исходных данных в виде формульного выражения, которое имеет геометрическую (кинематическую) и физическую части. Это дает возможность автоматически получить аналитическое выражение виртуальной работы моделируемой силы, а по ней, соответственно, обобщенные силы, соответствующие обобщенным или псевдокоординатам, и, наконец, уравнения динамики или статики. Таким образом, унифицируется решение задач динамики, статики и кинетостатики. Основной круг задач, которые можно решать предлагаемой методикой и СКА, касается, прежде всего, задач на колебания – определение положений равновесия, линеаризация уравнений в этой окрестности, расчет свободных и вынужденных колебаний линейных и нелинейных моделей, переходных процессов.

Главный вектор и главный момент сил инерции каждого i–го тела системы представляются приведенными к центру масс:

$$\vec{R}_i^u = -m_i\ddot{\vec{r}}_{C_i} \qquad \vec{M}_i^u = -\left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\omega}_i^{(i)}\right). \tag{3}$$

Здесь m_i – масса, $\vec{r}_{C_i}$ - радиус-вектор центра масс, $\vec{\omega}_i^{(i)}, \vec{\varepsilon}_i^{(i)}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения, $\left[\vec{J}_i^{(i)}\right]$ - тензор инерции для центра масс. Векторы угловой скорости и тензор инерции задаются в связанной с этим телом центральной системе координат (СК). Осями координат в таких системах чаще всего используются главные центральные оси инерции i-го тела, хотя это не обязательно. Радиус-вектор центра масс задается своими координатами в абсолютной неподвижной СК, как записано в формуле (3), но могут использоваться и проекции на оси указанной выше связанной СК.

Обобщенные силы инерции i-го тела, отвечающие обобщенным координатам системы, получаются аналитическим приведением в виде:

$$-\mathbf{Q}_i^u = \left[\frac{\partial\vec{r}_{C_i}}{\partial\mathbf{q}}\right]^T m_i\ddot{\vec{r}}_{C_i} + \left[\frac{\partial\vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right]^T \left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\omega}_i^{(i)}\right). \tag{4}$$

Входящие сюда транспонированные матрицы, представляют собой *структурные матрицы: геометрическую структурную матрицу* сил инерции $\mathbf{W}_{\vec{R}_i}^u = \left[\frac{\partial\vec{r}_{C_i}}{\partial\mathbf{q}}\right]$, и *дифференциальную структурную матрицу* - моментов сил инерции $\mathbf{W}^{u}_{\vec{M}_i} = \left[\dfrac{\partial \vec{\omega}^{(i)}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]$, которые по заданным *инерционным структурам* – зависимостям координат центра масс тела и проекциям его угловых скоростей от обобщенных координат, определяются аналитическим дифференцированием.

С помощью структурных матриц сил $\mathbf{W}_P = \dfrac{\partial \acute{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}$, вычисляемых аналогично по силовым структурам $\mathbf{c}(\mathbf{q})$, и вектора силовых элементов $\mathbf{P} = \{P_i\}$ путем сложения обобщенных сил инерции всех тел и приравнивания результата обобщенным силам активных сил системы, получается общее уравнение динамики системы, отвечающее вариационному принципу д'Аламбера–Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{W}^{u\;T}_{\vec{R}_i} m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \mathbf{W}^{u\;T}_{\vec{M}_i}\left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}^{(i)}_i + \vec{\omega}^{(i)}_i \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}^{(i)}_i\right)\right\} - \mathbf{W}^T_P \mathbf{P} = 0. \tag{5}$$

После выделения членов, соответствующих линейным силам вязкого трения и упругости и выделения сил возбуждения в (5) уравнения приобретают вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{W}^{u\;T}_{\vec{R}_i} m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \mathbf{W}^{u\;T}_{\vec{M}_i}\left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}^{(i)}_i + \vec{\omega}^{(i)}_i \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}^{(i)}_i\right)\right\} +$$
$$+\mathbf{W}^T_D\left[\mathbf{D}\right]\dot{\mathbf{в}} + \mathbf{W}^T_C\left[\mathbf{C}\right]\mathbf{г} - \mathbf{W}^T_P \mathbf{P} = \mathbf{W}^T_F \mathbf{F}(t). \tag{6}$$

Аналогичное векторно-матричное уравнение кладется в основу математической модели систем с неголономными связями. В этом случае более предпочтительным оказывается запись уравнения (6) в псевдокоординатах. Для этого исходные данные (списки инерционных, упругих, диссипативных, упругих и силовых элементов) дополняются дифференциальными зависимостями обобщенных скоростей модели от псевдоскоростей. Эти выражения следуют из линейных уравнений неголономностей вида

$$\mathbf{A}(\mathbf{q},t)\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{б}(\mathbf{q},t) = 0, \tag{7}$$

которые разрешаются относительно обобщенных скоростей:

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{в}(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}_1\\ \dot{\mathbf{q}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{в}\\ \dot{\mathbf{q}}_2\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}_2 + \begin{bmatrix}\mathbf{в}\\ 0\end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}(\mathbf{q},t) = \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}. \tag{8}$$

Выражение (8) справедливо для голономных и неголономных систем в псевдокоординатах.

Для стационарной системы найдем кинематические характеристики, входящие в (6),

$$\ddot{\vec{r}}_{Ci} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{W}^{u}_{Ci}\mathrm{G}\dot{\pi}\right) = \widetilde{\mathbf{W}}^{u}_{Ci}\dot{\pi} + \ldots$$

$$\vec{\omega}_i = \mathbf{W}^u_{\omega_i}\dot{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{W}}^u_{\omega_i}\dot{\pi}, \qquad \vec{\varepsilon}_i = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{W}^u_{\omega_i}\dot{\pi}\right) = \widetilde{\mathbf{W}}^u_{\omega_i}\ddot{\pi} + \ldots \tag{9}$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{W}}^u_{Ci} = \dfrac{\partial \vec{r}_{Ci}}{\partial \pi} = \dfrac{\partial \vec{r}_{Ci}}{\partial \dot{\pi}}$, $\widetilde{\mathbf{W}}^u_{\omega_i} = \dfrac{\partial \widetilde{\omega}_i}{\partial \dot{\pi}}$ - структурные матрицы, отвечающие псевдоскоростям.

После подстановки обобщенных сил с учетом связи вариаций обобщенных координат с вариациями псевдокоординат, следующих из (8), общее уравнение динамики в псевдокоординатах приобретет вид:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{n}\left\{ \tilde{\mathbf{W}}^{u\,T}_{Ci} m_i \ddot{\vec{r}}_{Ci} + \tilde{\mathbf{W}}^{u\,T}_{\omega_i}\left(\left[\,\vec{J}_i\,\right]\vec{\varepsilon}_i + \left[\,\vec{J}_i\,\right]\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i\right)\right\} +$$
$$+\tilde{\mathbf{W}}^T_D\left[\mathbf{D}\right]\dot{\mathbf{в}} + \tilde{\mathbf{W}}^T_C\left[\mathbf{C}\right]\mathbf{г} - \tilde{\mathbf{W}}^T_P\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{W}}^T_F\mathbf{F}(t). \tag{10}$$

Основные свойства этих уравнений:

1) Уравнение для голономных систем (5) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (9).

2) Матрицы $\widetilde{\mathbf{W}}^u_{Ci}$, $\tilde{\mathbf{W}}^u_{\omega_i}$, $\widetilde{\mathbf{W}}^T_P$ могут быть вычислены непосредственно через производные скоростей тел по обобщенным скоростям и псевдоскоростям.

3) Явный вид уравнения для неголономной системы тел получается, если вместо кинематических параметров каждого тела — линейного и углового ускорения и угловой скорости – подставить их выражения (8), получаемые из структур.

На базе приведенного способа описания механических моделей создана специальная СКА, способная эффективно решать комплекс задач о свободных и вынужденных линейных и нелинейных колебаний структурно сложных систем твердых тел, как с голономными, так и неголономными связями с плоским и пространственным движением звеньев. Составление перечисленных списков не вызывает трудностей, а алгоритмы обработки списков формализованы средствами проблемно-ориентированного языка С++, на котором реализована СКА. Заданная списками информация о системе обладает податливостью и вариативностью, что позволяет СКА автоматически построить уравнения динамики систем и провести аналитическую диагностику механической модели.

Для исследования малых колебаний уравнения (6), (10) упрощаются путем линеаризации, прежде всего, инерционных слагаемых. Так для голономной системы из (6) следуют уравнения малых колебаний в обобщенных координатах вида:

$$\mathbf{W}^T_J\left[\mathbf{J}\right]\mathbf{W}_J\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T_D\left[\mathbf{D}\right]\mathbf{W}_D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T_C\left[\mathbf{C}\right]\mathbf{W}_C\mathbf{q} = \mathbf{W}^T_P\,\mathbf{P}(t). \tag{11}$$

После удаления из (11) диссипативных и возбуждающих колебания слагаемых и подстановки гармонического решения $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \sin \omega t$, выделяются динамические матрицы масс $\mathbf{M} = \mathbf{W}^T_J\left[\mathbf{J}\right]\mathbf{W}_J$ и упругости $\mathbf{K} = \mathbf{W}^T_C\left[\mathbf{C}\right]\mathbf{W}_c$, с помощью которых задача о свободных колебаниях решается как полная или частичная проблема собственных значений $\mathbf{Kq}_0 = \omega^2\mathbf{Mq}_0$, где ω, $\mathbf{q}_0$ - соответственно собственная частота и собственный вектор. Решение осуществляется известными численными методами линейной алгебры. Это позволяет не только определить спектр собственных частот и формы колебаний, но и получить коэффициенты чувствительности частот к упругим и инерционным параметрам системы [13], что имеет важное значение в задачах синтеза.

Подстановка в (11) возбуждения по гармоническому закону и комплексного вида решения $\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{q}_{cj} \cos(j\omega t) + i \cdot \mathbf{q}_{sj} \sin(j\omega t)$ приводит к системе алгебраических уравнений для нахождения амплитуд решения задачи на вынужденные колебания

$$\{[\mathbf{K} - (j\omega)^2 \mathbf{M}] - i(j\omega)\mathbf{B}\} \cdot (\mathbf{q}_{cj} + i\mathbf{q}_{sj}) = (\mathbf{F}_{cj} + i\mathbf{F}_{sj}) . \qquad (12)$$

Тривиальным преобразованием уравнения (6) (или (10)) преобразуются к форме Коши для последующего интегрирования различными численными методами (например, Адамса или Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{g} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{cases},$$

где $\mathbf{G}$ и $\mathbf{g}$ – матрица и вектор из представления (8) и для голономных систем первая является единичной матрицей, а второй отсутствует, $\mathbf{M}$ – матрица инерции,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbf{W}_{\vec{\Phi}_i}^T m_i \mathbf{W}_{\vec{\Phi}_i} + \mathbf{W}_{\vec{M}_i}^T \left[\vec{J}_i \right] \mathbf{W}_{\vec{M}_i} \right\},$$

а $\mathbf{F}$ – вектор правой части

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{W}_{\vec{M}_i}^T \left(\vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i \right] \cdot \vec{\omega}_i^{(i)} \right) - \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\beta} - \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] y,$$

получаемые по соответствующим слагаемым из (6) или (10). Вычислительная эффективность предложенного алгоритма находится на достаточно высоком уровне благодаря использованию обобщенных и псевдокоординат.

Выводы. В работе показано, как развивалось направление в системах компьютерной алгебры, основанное на понятии структур и структурных матриц. Сначала - для узкого круга плоских вибрационных систем, затем проведены существенные доработки, позволившие включить в круг решаемых динамических задач анализа и синтеза пространственные системы с произвольными связями, в том числе, нестационарными, неголономными, неудерживающими. Унифицировано описание механических моделей дискретных систем и динамических процессов в них. В цитируемых работах показана практическая и вычислительная эффективность такого подхода.

Литература: *1. Ефимов Г. Б. Из истории развития и применения компьютерной алгебры в ИПМ им. М. В. Келдыша / Г. Б. Ефимов, Е. Ю. Зуева, И. Б. Щенков // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13 – № 6. – С. 11–18. 2. Грошева М. В. История использования аналитических вычислений в задачах механики / М. В. Грошева, Г. Б. Ефимов, В. В. Самсонов. – М.: Изд. ИПМ им. М. В. Келдыша – РАН. – 2005. – 87 с. 3. Ефимов Г. Б. Об истории использования отечественных систем символьных преобразований в механических приложениях / Г. Б. Ефимов, М. В. Грошева // Математичні машини і системи. – 2008. – № 1. – С. 85–90. 4. АНАЛИТИК – алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований / [В. М. Глушков, В. П. Клименко, А. А. Стогний и др.] // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 102 –134. 5. Митропольский Ю. А. Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. / Ю. А. Митропольский, А. А. Молчанов. – К.: Наукова думка. – 1981. – 147 с. 6. Митин В. Н. Структурные матрицы цепных вибрационных систем / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – Вып. 17. – 1973. – С. 3–7. 7. Исследо–*

вание и выбор параметров динамически нагруженных приводов турбопоршневого двигателя. / Отчет по НИР // Харьковский политехнический институт. – Хоздоговор № 21511/202 ОП. – № ГР 71030993. – Ч. 1. – Харьков. – 1975. – 124 с. 8. Диагностика рабочего процесса транспортного двигателя / Отчет по НИР (окончательный) // Харьковский политехнический институт.– Хоздоговор № 21861 // Делопроизводство кафедры теоретической механики НТУ «ХПИ». – Харьков. – 1981. – 184 с. 9. Митин В. Н. Синтез дискретных вибрационных систем с максимально сжатым спектром / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 4. – С. 614–620. 10. Митин В. Н. Структуры дискретных механических моделей конструкций / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. Вып. 35. – 1982. – С. 3–6. 11. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование задач механики голономных систем твердых тел со стационарными и нестационарными связями / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 53. – С. 96–102. 12. Андреев Ю. М. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 54. – С. 93–98. 13. Андреев Ю. М. Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1984. – Вып. 40. – С. 50–56. 14. Андреев Ю. М. О динамике голономных систем твердых тел. / Ю. М Андреев, О. К. Морачковский // Прикладная механика. – 2005. – 41. – № 7. – С. 130–138. 15. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера – Лагранжа / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, №9. – С. 106–115. 16. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир. – 1980. – 296 с. 17. Величенко В. В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники / В. В. Величенко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1988. – 280 с. 18. Коноплев В. А. Агрегативная механика систем твердых тел / В. А. Коноплев. – М.: Наука. – 1996. – 166 с. 19. Kane T. R. Dynamics: Theory and Applications / T. R. Kane, D. A. Levinson. – New York: McGraw-Hill, 1985. – 402 p.

Bibliography (transliterated): *1. Efimov G. B. Iz istorii razvitiya i primeneniya kompiuternoy algebru v IPM im. M. V. Kelducha / G. B. Efimov, E. Yu. Zueva, I. B. Shenkov // Matematicheskoe modelirovanie – 2001. –T. 13 – № 6. – S. 11–18. 2. Grocheva M. V. Istoriya ispolzobaniya analiticheskih duchisleniy v zadachah mehaniki / M. V. Grocheva, G. B. Efimov, V. V. Samsonov. – M.: Izd. IPM im. M. V. Kelducha – RAN. – 2005. – 87 s. 3. Efimov G. B. Ob istorii ispolzovaniya otechestvennuh sistem simvolnuh preobrazovaniy v mehanycheskih prilogeniyah / G. B. Efimov, M. V. Grocheva // Matematuchni mashinu I susnemu. – 2008. – № 1. – S. 85–90. 4. ANALITIK – algoritmicheskiy yazuk dlya opisaniya processov s ispolzovaniem analiticheskih preobrazovaniy / [V. M. Glushkov, V. P. Klimenko, A. A. Stogniy i dr.] // Kibernetica. – 1971. – № 3. – S. 102 –134. 5. Mitropolskiy Yu. A. Mashinnuy analiz nelineynuh rezonansnuh cepey. / Yu. A. Mitropolskiy, A. A. Molchanov. – K.: Naukova dumka. – 1981. – 147 s. 6. Mitin V. N. Structurnie matricu cepnih vibracionnyh sistem / V. N. Mitin, L. I. Shteynvolf // Dinamika i prochnost' mashin. – Vup. 17. – 1973. – S. 3–7. 7. Issledovanie i vubor parametrov dinamicheski nagrugennuh privodov turboporchnevogo dvigatel'a. / Otchet po NIR // Kharkovskiy politehnicheskiy institut. – Hozdogovor № 21511/202 OP. – № GR 71030993. – Ch. 1. – Kharkov. – 1975. – 124 s. 8. Diagnostika rabochego processa transportnogo dvigatel'a / Otchet po NIR (okonchatel'nuy) // Kharkovskiy politehnicheskiy institut.– Hozdogovor № 21861 // Deloproizvodstvo kafedry teoreticheskoj mehanyki NTU «KhPI». – Kharkov. – 1981. –184 s. 9. Mitin V. N. Sintez diskretnuh vibracionnyh sistem s maximalno sgatum spektrom / V. N. Mitin, L. I. Shteynvolf // Prikladnaya matematica i mehanyca. – 1975. – T. 39, № 4. – S. 614–620. 10. Mitin V. N. Structury diskretnuh mehanicheskih modeley konstrukciy / V. N. Mitin, L. I. Shteynvolf // Dinamika i prochnost' mashin. Vup. 35. – 1982. – S. 3–6. 11. Andreev Yu. M. Komputernoe modelirovanie zadach mehanyci golonomnuh sistem tverduh tel so stacionarnumi i nestacionarnumi svjaz'ami / Yu. M. Andreev, L. I. Shteynvolf // Dinamika i prochnost' mashin. – 1993. – Vup. 53. – S. 96–102. 12. Andreev Yu. M. Komputernoe postroenie differencialnuh uravneniy dvigeniya negolonomnuh sistem / Yu. M. Andreev, L. I. Shteynvolf // Dinamika i prochnost' mashin. – 1993. – Vup. 54. – S. 93–98. 13. Andreev Yu. M. Sintez nelineynuh vibracionnyh sistem po skeletnum krivum s ispolzobaniyem teorii chuvstvitel'nosty / Yu. M. Andreev, L. I. Shteynvolf // Dinamika i prochnost' mashin. – 1984. – Vup. 40. – S. 50–56. 14. Andreev Yu. M. O dinamike golonomnuh sistem tverduh tel. / Yu. M. Andreev, O. K. Morachkovsky // Prikladnaya mehanyka. – 2005. – 41. – № 7. –*

S. 130–138. 15. Andreev Yu. M. Komputernoe modelirovanie negolonomnuh sistem tverduh tel na osnove principa Dalambera – Lagranga / Yu. M. Andreev, O. K. Morachkovsky // Prikl. mehanyca. – 2006. – T. 42, №9. – S. 106–115. 16. Wittenburg Y. Dinamika sistem tverduh tel / Y. Wittenburg. – M.: Mup. – 1980. – 296 s. 17. Velichenko V. V. Matrichno-geometricheskie metodu v mehanyke s prilogeniyami k zadacham robototehniki / V. V. Velichenko. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. – 1988. – 280 s. 18. Konoplev V. A. Agregativnaya mehanyca sistem tverduh tel / V. A. Konoplev. – M.: Nauka. – 1996. – 166 s. 19. Kane T. R. Dynamics: Theory and Applications / T. R. Kane, D. A. Levinson. – New York: McGraw-Hill, 1985. – 402 p.

Андрєєв Ю.М., Ларін А.О.

МЕТОД СТРУКТУРНИХ МАТРИЦЬ В МЕХАНІЦІ МАШИН
(ІСТОРІЯ ПИТАННЯ)

Стаття обговорює історію застосування у механіці машин метода структурних матриць. Особлива увага приділяється роботам, що проводилися у ХПІ під керівництвом відомого вченого професора Л. І. Штейнвольфа.

Андреев Ю.М., Ларин А.А.

МЕТОД СТРУКТУРНЫХ МАТРИЦ В МЕХАНИКЕ МАШИН
(ИСТОРИЯ ВОПРОСА)

В статье рассматривается история применения в механике машин метода структурных матриц. Особое внимание уделяется работам, проводившимся в ХПИ под руководством известного ученого профессора Л. И. Штейнвольфа.

Andreev Yu.M., Larin A.A.

METHOD OF STRUCTURAL MATRIXES IN THE MECHANIC OF MACHINES
(HISTORY OF THE PROBLEM)

In article the history of application in the mechanic of machines of a method structural matrixes is considered. The special attention is given the works which are spent in KhPI under direction of known scientific professor L. I. Shtejnvolf.

УДК 539.3:534.1

Ольшанский В.П., д-р ф.-м. наук

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ А.П. ФИЛИППОВА В ТЕОРИИ УПРУГОГО УДАРА

Введение. Работы по упругому удару приходятся на период расцвета творческой деятельности академика А.П. Филиппова. Он начал решать задачи упругого удара уже будучи признанным специалистов в СССР по механике неупругого удара. Но, зная несовершенства теории неупругого удара Сен-Венана, Анатолий Петрович не стал дальше развивать эту теорию, а начал решать задачи нестационарных колебаний балок и пластин в более современной постановке, которую предложил С.П. Тимошенко. Переход к новому способу описания явления удара стал возможным благодаря внедрению ЭВМ в научные исследования. На ЭВМ стало возможным численно решать нелинейное интегральное уравнение упругого удара с неизвестным контактным усилием взаимодействия соударяющихся тел. Это численное решение позволило найти зависимость силы удара от времени, обнаружить многократность соударения, а также вычислить перемещения и напряжения в ударяемом теле. Рассмотрим достижения Анатолия Петровича в этом направлении за время длительной научной деятельности, подтвержденной его публикациями.