УДК 621.002:658.56

Ю.И. СОЗОНОВ, канд. тех. наук,
Н.Ю. ЛАМНАУЭР, канд. тех. наук,
О.С. ЧЕРКАШИНА, Харьков, Украина

ВРЕМЕННАЯ МОДЕЛЬ КАЧЕСТВА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

У статті пропонується часова модель якості ТС, яка дозволяє оцінити будь-яку гарантію величини її напрацювання за всіма значеннями параметрів у встановлених межах. У роботі одержані числові характеристики моделей безрозмірного параметра та знайдена функція розподілу, яка має елементарний вигляд, що дозволяє оцінити параметри цієї моделі.

В статье рассматривается временная модель качества ТС, которая разрешает оценить любую гарантию величины ее наработки по всем значениям параметров в установленных границах. В работе получены числовые характеристики моделей безразмерного параметра и найдена функция распределения, которая имеет элементарный вид позволяющий оценить параметры этой модели.

The article proposed a temporary model quality of the TS, which can evaluate any size guarantee its achievements in all parameter values in the established limits. The work derived numerical characteristic of a dimensionless parameter and found the distribution function, that having is an elementary form, which allows estimating parameters of this model.

Введение. Использование контрольных карт Шухарта для количественных признаков получили большое применение [1, 2], которые используются для оценивания параметров производственного процесса в пусковом периоде, для управления процессом по уровню настройки, для управления процессом по технологическому рассеиванию и для ряда других проблем. При построении карт контроля в основном предполагается, что интересующий признак качества распределен нормально, что в основном неверно, так как все признаки качества есть ограниченные величины. И как показали исследования, они в основном не симметричны и имеют параметр формы, который меняется со временем. Поэтому в работах [3, 4] предлагается с использованием безразмерного параметра применять универсальную трех параметрическую модель признака качества для симметричного относительно номинального размера допуска. Проведенные исследования с помощью статистического моделирования показали, что предлагаемые оценки параметров данной модели имеют достаточно большую дисперсию, что делает невозможным их применять для малых выборок. Поэтому стала задача построить временную модель качества технологической системы, которая была применима при любом допуске относительно номинального размера и найти лучшие для нее оценки параметров распределения.

Так как качество технологической системы (ТС) определяется через многие показатели качества, то построенная модель должна содержать все эти показатели. При этом, чем ближе к номинальным значениям удерживаются величины контролируемых показателей качества, тем выше качество ТС. При оценке качества ТС исходим из следующих предпосылок:

1. Определение качества ТС должно происходить их тех значений показателей, которые установлены технической документацией.

2. Качество системы должно оцениваться с учетом показателей качества изготавливаемой продукции, которые формируются (или изменяются) от времени t при выполнении ТС соответствующих технологических операций.

3. Показатели качества следует определять для цикла функционирования ТС - времени выполнения установленного объема работ.

При этом нужно иметь в виду, что в определенные моменты времени ТС может быть работоспособна по тем или иным принятым показателям качества (вещественным, энергетическим, информационным) и не работоспособна по другим.

Модель качества ТС. В сложной ТС контролируемые признаки xi ($1 \le i \le N$, где N число признаков) разнородны, то есть имеют различную размерность. Это не позволяет рассматривать их как однородную совокупность случайных величин. Для комплексной же оценки качества системы необходимо иметь безразмерные величины {ri}, чтобы можно было анализировать их вероятностно-статистическими методами.

Безразмерная величина может быть получена различными способами, но нормирующее выражение необходимо выбрать таким, чтобы величины отображались в удобной для использования относительной системе исчисления.

Можно предложим следующую безразмерную величину ri(t):

$$r_i(t)=(x_i(t)-x_{i.})/(x_i^*-x_i), \qquad (1)$$

где x_i^* - допустимый верхний предел i-ого параметра; x_i - среднее значение допустимого интервала i-ого параметра.

Величина $r_i(t)$ может принимать любые значения, но все они таковы, что при выполнении неравенства $-1<r_i(t)<1$, процесс в системе протекает качественно, а при значениях $r_i(t)\geq 1$ или $r_i(t)\leq -1$ система имеет отказ по качеству.

Так как при любом конечном t величины $r_i(t)$ физически ограничены как "сверху", так и "снизу", то безразмерная величина $r_i(t)$ имеет нижний $r_{i.o}(t)$ и верхний пороги $r_{i.в}(t)$ значений $r_i(t)$, которые конечны. Причем всегда в один момент времени $r_{i.o}(t)<r_{i.в}(t)$. Поэтому моменты $t_{1.i}$ и $t_{2.i}$ отказа i-ого показателя качества системы определяется из решения уравнений $r_{i.o}(t_{1.i})=-1$ и $r_{i.в}(t_{2.i})=1$, а качество этого показателя по времени характеризуется величиной $H_i=min\ (t_{1.i},\ t_{2.i})$. Тогда качество всей системы по контролируемым показателям можно принять за величину

$$H=\min_{1\leq i\leq N}\left\{H_i\right\}. \tag{2}$$

Заметим, что при таком подходе оценки качества системы все наблюдаемые значения $r_i(t)$ ($1\leq i\leq m$, m-объем испытаний) могут лежат в интервале ($-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon$), где ε малое положительное число. Так как эта оценка Н определяется по ненаблюдаемым значениям верхнего $r_в$ и нижнего а порога безразмерной величины r.

Построим стохастическую модель безразмерной величины R. Массовые испытания некоторых признаков качества систем машиностроительного производства показали, что для определенных моментов t_j времени t среднее значение $\bar{r}$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(r)$ безразмерной величины r со временем изменяются в сторону увеличения, но при этом практически не меняются $r_в$ и a. То есть изменение $\bar{r}$ и $\sigma(r)$ определяется изменением только формы кривой плотности распределения $f(r)$.

Другие массовые эксперименты некоторых параметров систем в определенных моментах t_j времени t оставляют неизменным $\bar{r}$ и $\sigma(r)$, но в тоже время достаточно существенно меняют $r_в$ и a. То есть изменение осуществляется за счет сдвига а и формы кривой плотности $f(r)$.

В общем случае, как показывают массовые исследования, происходит изменение по времени t как $\bar{r}$, $\sigma(r)$, так и $r_в$, a. Исследования показали, что функция плотности (1) $f(r)$ должна иметь параметр формы кривой α, который со временем t также меняется, т.е. $\alpha=\alpha(t)$.

Наиболее эффективно, из экономических соображений по малой выборке оценивать $r_в$ и a. Но малая выборка требует знания математической модели признаков качества ТС [5], поэтому построим модель для безразмерной величины *R*.

Так как признаки качества системы, как отмечалось, имеют различную физическую природу, то практически нельзя найти общую физическую модель для всех, хотя и безразмерных, величин. Построим приближенную стохастическую модель из тех физических предпосылок, что безразмерные величины ограничены и, что функция плотности распределения f(r) имеет различную форму, которую можно определить по результатам небольшого количества испытаний.

Итак, истинная функция плотности $f_u(r)$ безразмерной величины имеет вид:

$$f_u(r) = (r-a)(a+b-r)\psi_u(r), \qquad (3)$$

где a - нижний порог величины *R*; $r_k = a+b$- верхний порог величины *R*; $\psi_u(r)$- истинная функция безразмерной величины R.

Так как $f_u(r)>0$ для любых r принадлежащих $(a,\ a+b)$, то $\psi_u(r)>0$ для любых r, принадлежащих $(a,\ a+b)$.

Истинную функцию $\psi_u(r)$ мы никогда не сможем найти. Поэтому найдем ее в приближении, которое может быть определено по некоторому количеству испытаний. Известно, чем больше будет иметь неизвестных параметров функция $\psi(r)$, тем более точно она может быть определена по результатам испытаний. Практика показала, что для определения неизвестных параметров по результатам испытаний оптимальное число параметров у функции плотности f(r) должно быть не более трех, так как с увеличением параметров уменьшается точность их определения. Поэтому будем определять функцию $\psi(r)$с одним неизвестным параметром, так как функция f(r) уже содержит два неизвестных параметра aи b.

Представим функцию в виде степенной зависимости

$$\psi(r) = C(a+b-r)^{\alpha-1},$$

где C - нормирующий множитель; α - параметр формы.

В интервале функция $\psi(r)>0$ и при различных параметрах формы α может, как убывать, так и возрастать и быть постоянной. Тогда функция плотности f(r) имеет вид:

$$f(r) = C(r-a)(a+b-r)^{\alpha},$$

а из условия нормировки имеем

$$f(r)=\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{b^{2+\alpha}}(r-a)(a+b-r)^{\alpha}, \qquad (4)$$

где α>-1 и r принадлежит $[a, a+b]$.

Найдем функцию распределения *F(r)* безразмерного параметра *r* для (4), с использованием линейной замены $z=r-a$.

$$F(r)=\begin{cases} 0 & ,при \quad r\le a \\ 1-\frac{(b+a-r)^{\alpha+1}\left(b+(1+\alpha)(r-a)\right)}{b^{2+\alpha}} & ,при \quad a\le r\le a+b \\ 1 & ,при \quad r>a+b \end{cases} \qquad (5)$$

Заметим, что предложенные модели (4) соответствуют распределению «типа I» в системе кривых Пирсона. Как известно [6], частный случай кривых Пирсона «типа I» есть бета-распределение 1-ого рода. Но даже для бета-распределения 1-ого рода функция распределения определяется через специальную неполную бета-функцию. Для предложенных моделей функции распределения $F(r)$ выражается через элементарные функции, что позволяет в дальнейшем использовать их в теории порядковых статистик для оценки параметров этих моделей по малой выборке.

Числовые характеристики и оценка параметров временной модели качества. Найдем числовые характеристики моделей (4) безразмерного параметра R, которые в дальнейшем будут использованы для оценки параметров этой модели.

Математическое ожидание случайной величины R для модели (4) имеет вид:

$$M(R)=a+\frac{2b}{\alpha+3}. \qquad (6)$$

Дисперсия определяется по формуле

$$D(R)=\frac{2(\alpha+1)b^2}{(\alpha+3)^2(\alpha+4)}. \qquad (7)$$

Используя метод определения параметров распределений в [7], найдем модальное значение первой порядковой статистики.

Функция распределения наименьшего члена выборки объема m имеет вид [6] $F_1(t)=1-(1-F(t))^m$, а плотность распределения наименьшего члена выборки $f_1(t) = m(1-(F(t))^{m-1} f(t)$. Тогда модальное значение наименьшего члена выборки определяется из уравнения

$$\left[1-F(t)\right] f'(t) - (m-1) f^2(t) = 0. \qquad (8)$$

Для модели (4) уравнение (8) имеет три действительных корня, из которых только один дает модальное значение наименьшего члена выборки в $(a, a+b)$.

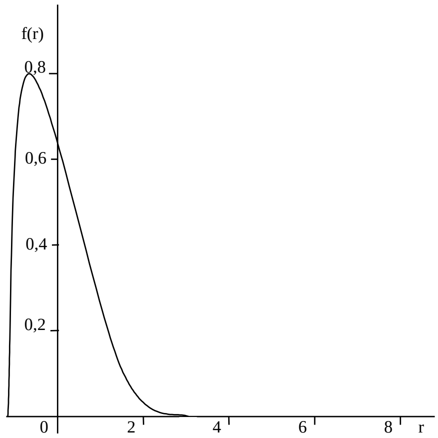

Рисунок – Функция плотности безразмерного параметра, полученная предложенным методом оценки параметров

$$t_{\mathrm{mod},i} = -\frac{-1 + mb - \alpha - b + \sqrt{1 - 2mb + 2\alpha + 2b + m^2b^2 + 2mb\alpha - 2mb^2 + \alpha^2 - 2\alpha b + b^2}}{2(m-1)} + a + b.$$

Приравнивая, данное модальное значение наименьшему нормированному значению выборки r_1 и решая это уравнение относительно α, получим

$$\alpha = \frac{a^2m + r_1^2m - 2amr_1 + mba - mbr_1 + 2ar_1 - a^2 + a - r_1 - r_1^2 + b + br_1 - ba}{r_1 - a}. \qquad (9)$$

Решая систему трех уравнений (9), (7) и (6) подставляя вместо теоретической дисперсии $D(R)$ исправленную выборочную дисперсию S^2, а вместо математического ожидания $M(R)$ выборочное среднее r_c нормированной случайной величины R, можно найти оценки искомых параметров α, a и b. Так как полученные аналитические оценки очень громоздкие, то проще находить эти оценки по составленной программе в системе MAPLE.

Так, например, при измерении одного параметра в некоторый момент времени были получены значения *x:=[13,83; 13,84; 13,86; 13,87; 13.88; 13,89; 13,90; 13,92; 13,95; 13,96]*

Номинальное значение для этого параметра 13,9. Верхнее допустимое значение δ_1=0,06, а нижнее δ_2=-0,07. Используя программу, по формуле (1) были найдены все 10 нормированных значений. Для них были определены $r_c = -0,06666666673$, $S = 0,5794846581$ и $r_1 = -0,8666666667$. Решение системы при найденных значениях позволило оценить параметры модели $a = -0,9584412184$, $b = 8,156878184$ и $\alpha = 15,29358815$. Так как верхний порог больше единицы, то в это время есть вероятность выхода измеряемого параметра за допуск и эта вероятность равна 0,05602544685. На рисунке построена функция плотности (4) при найденных параметрах

Проведенный анализ с использованием статистического моделирования показал, что предложенные оценки модели (4) имеют при одних и тех же значениях с использованием более общей формулы (1) имеют дисперсию меньшую, чем ранее предложенные в [3,4]. Поэтому данные оценки параметров модели (4) могут быть применимы для малой выборки.

Выводы. 1. Временная модель качества ТС позволяет оценить любую гарантию величины наработки ТС, включая и 100%, по всем значениям ее параметров в установленных пределах.

2. Приближенная модель безразмерной величины качества может быть использованы при любых контролируемых параметрах независимо от их физической природы и статистических распределений.

3. Для модели безразмерной величины найдена близкая к истинной функции распределения, которая имеет элементарный вид, что позволяет оценить параметры этой модели.

4. Разработанная методика оценки качества ТС достаточно проста и может быть использована для оценки качества любой ТС.

Список литература: **1.** *Х. –Й. Миттаг, Х. Ринне*. Статистические методы обеспечения качества. Пер. с нем. – М.: Машиностроение, 1995. – 616 с. **2.** Контроль качества продукции машиностроения. *Под ред. А. Э. Артеса*. М.: Издательство стандартов, 1999. – 448 с. **3**. *Куцин А. Н., Созонов Ю. И.* Оценка качества технических систем // Сборка в машиностроении, приборостроении, М.: – 2004. - №7.- С.23-27. **4**. *Резниченко Н. К.* Безразмерный комплексный параметр качества технологической системы // Високі технології в машинобудуванні: Збірник наукових праць, - Харків: «ХПІ». -2006. – Вип..1 (12) – С. 417 – 423. **5**. *Гаскаров Д. В., Шаповалов В. И.* Малая выборка. – М.: Статистика, 1978. – 248 с. **6**. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 496с. **7**. *Ламнауэр Н. Ю., Пташный О. Д., Созонов Ю. И.* Оценка надежности вращающихся изделий // Машиноведение и САПР: Сборник научных трудов, - Харків: НТУ «ХПІ». -2008. –№42 – С. 7 5– 80.