УДК 519.85

Л.Г. РАСКИН, д-р. техн. наук, *О.В. СЕРАЯ*, канд. техн. наук.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО РЕСУРСА

У статті запропоновано ітераційну процедуру розв’язання нелінійної розподіленої задачі з адитивною сепарабельною цільовою функцією та лінійними обмежаннями. Процедура реалізує декомпозицію вихідної складної задачі до послідовності простих. Методику основано на теоремі, яку сформульовано та доведено.

The iterative procedure of the decision of the nonlinear distributing problem is offered in article with additive separable goal function and linear restrictions. The procedure realizes the decomposition of the source difficult problem to the sequences more simple. The Methods is founded on theorem, which is worded and proved.

Постановка проблемы. Анализ литературы. Многочисленные задачи техники, экономики, социологии, исследования операций и т.д. формулируются в терминах оптимизационных задач распределения ограниченного ресурса [1, 2]. Несмотря на обширную библиографию (например, [3] содержит более 350 наименований работ по этой тематике) и хорошо отработанную технологию решения многих задач этого типа, остается проблемной вычислительная процедура решения многомерных задач рационального распределения ресурса в случаях высокой размерности и большого числа ограничений.

Формулировка традиционной задачи оптимального распределения многомерного ограниченного ресурса сводится к следующей математической модели: найти набор $X=\{x_j\}$, $j=1, 2, ..., n$, максимизирующий аддитивную сепарабельную нелинейную целевую функцию

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j)\,, \qquad (1)$$

и удовлетворяющий линейным ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\,,\ i=1, 2, ..., m\,; \qquad (2)$$

$$x_j\ge 0\,,\ j=1, 2, ..., n\,, \qquad (3)$$

где

$$\varphi_j(x_j)\ge 0\,,\ \varphi''_j(x_j)<0\,,\ a_{ij}\ge 0\,,\ i=1,...,\ m\,,\ j=1,...,\ n\,.$$

Эта задача относительно легко решается, когда ограничения (2) – равенства, а ограничения (3) на знак переменных отсутствуют (например, методом неопределенных множителей Лагранжа [4]). В рассматриваемом случае для её решения необходимо привлечение более мощных методов (теорема Куна-Таккера), что приводит на практике к серьезным вычислительным трудностям [5 – 8].

Целью работы является разработка простой, легко реализуемой вычислительной схемы решения задачи распределения многомерного ресурса, основой которой является теорема, определяющая принципиальное свойство решений задачи (1) – (3).

Теорема. Пусть $X^{(b)}=\ x_j^{(b)}$ – набор, максимизирующий

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j)\,,\ f''_j(x_j)<0\,, \qquad (4)$$

удовлетворяет системе ограничений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(b)}=b_i\,,\ i=1, 2,...,\ m\,; \qquad (5)$$

$$a_{ij}\ge 0\,,\ x_j\ge 0\,,\ i=1, 2,...,\ m,\ \ j=1, 2,...,\ n\,. \qquad (6)$$

Тогда компоненты набора $X^{(c)}=\ x_j^{(c)}$, максимизирующего (4) и удовлетворяющего ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(c)}=c_i\le b_i\,,\ i=1, 2, ...,\ m\,, \qquad (7)$$

обладают следующим свойством:

$$x_j^{(c)}\le x_j^{(b)}\,,\ j=1, 2, ...,\ n\,. \qquad (8)$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

С использованием теоремы задача (1) – (3) легко решается, если искомый набор $X = \{x_j\}$ является целочисленным.

Метод решения задачи (1) – (3). Очевидным следствием теоремы является следующие утверждение. Пусть x_j – целые, $j = 1, 2, ..., n$, набор $\{x_j^{(c)}\}$ является решением задачи (4), (7) и

$$b_i = c_i + a_{ij_0}, \ i = 1, 2, ..., m,$$

где

$$j_0 = \arg\max_j \ f_j(x_j^{(c)} + 1) - f_j(x_j^{(c)}) .$$

Тогда

$$x_j^{(b)} = \begin{cases} x_j^{(c)}, & j \neq j_0, \\ x_j^{(c)} + 1, & j = j_0. \end{cases}$$

Теперь задача отыскания целочисленного набора $\{x_j^{(b)}\}$, максимизирующего (1) и удовлетворяющего (2) – (3), решается с использованием следующей итерационной процедуры.

Решение начинается с нулевого вектора $X^{(0)} = (0, 0, ..., 0)$. На каждой итерации осуществляется однокомпонентное изменение вектора решения. Ясно, что нулевой вектор $X^{(0)}$ является оптимальным при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0, \qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

При этом

$$x_j^{(1)} = \begin{cases} x_j^{(0)} = 0, & j \neq j_0, \\ x_j^{(0)} + 1 = 1, & j = j_0, \end{cases}$$

где

$$j_0 = \arg\max_j \ f_j(1) - f_j(0) ,$$

если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(1)} \leq b_i, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Таким образом, вектор решения $X^{(1)} = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ после первой итерации содержит одну ненулевую компоненту, расположенную на j_0 -м месте. На следующей итерации процедура повторяется.

Пусть проделано k итераций улучшения плана. При этом известен вектор $X^{(k)} = \{x_j^{(k)}\}$, максимизирующий (1) и удовлетворяющий (2), (3), причем $\sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)} = k$.

На очередной $(k+1)$-й итерации может быть получен вектор $X^{(k+1)} = \{x_1^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)}\}$, решающий задачу (1) – (3) при условии, что $\sum_{j=1}^{n} x_j^{(k+1)} = k + 1$.

В соответствии с изложенным

$$x_j^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)}, & j \neq j_0, \\ x_j^{(k)} + 1, & j = j_0, \end{cases}$$

где

$$j_0 = \arg\max_j \ f_j(x_j^{(k)} + 1) - f_j(x_j^{(k)}) ,$$

если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + a_{ij_0} \leq b_i, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Описанная процедура продолжается до тех пор, пока на очередной итерации попытка увеличения на единицу любой из компонент вектора решения не приведет к нарушению ограничений (2).

Сформулированная теорема может быть использована для решения задачи (1) – (3) и при снятом ограничении на целочисленность переменных.

Из множества ограничений (2) выбираем любое, например, с номером i_0, и преобразуем его в ограничение – равенство.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = b_{i_0} . \qquad (9)$$

Решаем теперь задачу отыскания набора $X = \{x_j\}$, максимизируещего (1) и удовлетворяющего (9). Используем метод неопределенных множителей Лагранжа [2]. Функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi(X,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j) + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j - b_{i_0} \right).$$

Далее формируем систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi(X,\lambda)}{\partial x_j} = \varphi'(x_j) - \lambda a_{i_0 j} = 0,\ j = 1, 2, ..., n; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi(X,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j - b_{i_0} = 0 . \qquad (11)$$

Решение этой системы дает искомый набор. Пусть, например, $\varphi_j(x_j) = c_j x_j^{\frac{1}{2}}$, $j = 1, 2, ..., n$. Тогда система уравнений (10) имеет вид

$$\frac{1}{2} c_j x_j^{\frac{1}{2}} - \lambda a_{i_0 j} = 0,\ j = 1, 2, ..., n,$$

откуда

$$x_j = \frac{1}{(2\lambda)^2 a_{i_0 j}^2},\ j = 1, 2, ..., n . \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\frac{1}{(2\lambda)^2} = \frac{b_{i_0 j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_{i_0 j}}}$$

и, с учетом (12),

$$x_j^{(i_0)} = \frac{b_{i_0 j}}{a_{i_0 j}^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_{i_0 j}}} > 0, \quad j = 1, 2, ..., n .$$

Аналогично решается задача (1), (9) для любых выпуклых вверх функций $\varphi_j(x_j)$.

Подставим получаемый при этом набор $\{x_j^{(i_0)}\}$ в ограничения (2). При этом множество ограничений разобьется на два непересекающихся подмножества

$$J_0 = \left\{ i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(i_0)} \le b_i \right\},\ i_0 \in J_0 ; \qquad (13)$$

$$J_1 = \left\{ i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(i_0)} > b_i \right\}; \qquad (14)$$

$$J_0 \cap J_1 = 0,\ J_0 \cup J_1 = \{1, 2, ..., m\}.$$

Выберем произвольный номер $i_1 \in J_1$ и вычислим

$$g_{i_1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} x_j^{(i_0)} . \qquad (15)$$

Ясно, что план $\{x_j^{(i_0)}\}$ является решением задачи (1) – (2) для множества ограничений $J_0 \cup i_1$, где i_1 – номер ограничения (15).

Решим теперь задачу максимизации (1) с ограничением

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} x_j = b_{i_1} . \qquad (16)$$

Так как, с учетом (14), (15), $b_{i_1} < g_{i_1}$, то в соответствии с теоремой, $x_j^{(i_1)} \le x_j^{(i_0)}$. Поэтому для нового набора $\{x_j^{(i_1)}\}$ все ограничения из подмножества J_0 не будут нарушены. Кроме того, по меньшей мере одно ограничение (с номером i_l) из подмножества J_1 перейдет в J_0, пополнив его. Дальнейшая процедура аналогична. Вновь выбирается ограничение i_2 из подмножества $J_1 \setminus i_1$ и в результате решения задачи максимизации (1) с ограничением

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_2 j} x_j = b_{i_2}$$

получаем новый набор $\{x_j^{(i_2)}\}$. При использовании этого набора, как и раньше, по меньшей мере одно ограничение из подмножества $J_1 \setminus i_1$ перейдет в $J_0 \cup i_0 \cup i_1$. Процедура решения заканчивается, когда множество ограничений типа (14) окажется пусто. В результате будет получен набор, который одному (или нескольким) ограничениям (2) будет удовлетворять, как равенствам, а остальным – как неравенствам.

Выводы. Таким образом, предложена вычислительная процедура решения сепарабельной нелинейной задачи распределения многомерного ресурса. Научная новизна полученного результата состоит в выявлении и конструктивном использовании специфического свойства решений семейства оптимизационных задач (1) – (3), определяемого теоремой, которая сформулирована и доказана в работе. Практическая полезность этого результата определяется возможностью декомпозиции исходной сложной задачи к совокупности более простых. При этом схема решения задачи является итерационной. На каждой итерации решается простая задача максимизации аддитивной функции с выпуклым вверх компонентами и единственным линейным ограничением. В случае необходимости эта задача легко решается численно методом последовательного распределения [9].

Приложение.

Доказательство теоремы.

Предположим противное, то есть пусть в наборе $x_j^{(c)}$ имеется хотя бы один элемент, например, с номером j_0 для которого неравенство (8) не выполняется. При этом

$$x_{j_0}^{(c)} > x_{j_0}^{b}, \; x_j^{(c)} \le x_j^{(b)}, \; j \ne j_0. \qquad (П.1)$$

Пусть

$$a_{ij_0} \left(x_{j_0}^{(c)} - x_{j_0}^{(b)}\right) = d_i, \; i = 1, 2, ..., m. \qquad (П.2)$$

Введем z_j такие, что

$$x_j^{(c)} \le z_j \le x_j^{(b)}, \; j \ne j_0; \qquad (П.3)$$

$$\sum_{j \ne j_0} a_{ij} z_j - \sum_{j \ne j_0} a_{ij} x_j^{(c)} = d_i, \; i = 1, 2, ..., \; m, \qquad (П.4)$$

а также u_j такие, что

$$x_j^{(c)} \le u_j \le x_j^{(b)}, \; j \ne j_0; \qquad (П.5)$$

$$\sum_{j \ne j_0} a_{ij} x_j^{(b)} - \sum_{j \ne j_0} a_{ij} u_j = d_i, \; i = 1, 2, ..., \; m. \qquad (П.6)$$

При этом из (П.2) и (П.4) следует, что

$$\sum_{i \ne j_0} a_{ij} z_j - \sum_{j \ne j_0} a_{ij} x_j^{(c)} = a_{ij_0} x_{j_0}^{(c)} - a_{ij_0} x_j^{(b)}$$

или

$$\sum_{j \ne j_0} a_{ij} z_j + a_{ij_0} x_{j_0}^{(b)} = \sum_{j \ne j_0} a_{ij} x_j^{(c)} + a_{ij_0} x_j^{(c)} = c_j, \; i = 1, 2, ..., \; m. \qquad (П.7)$$

Одновременно из (П.2) и (П.6) следует, что

$$\sum_{j \ne j_0} a_{ij} x_j^{(b)} - \sum_{j \ne j_0} a_{ij_0} u_j = a_{ij_0} x_{j_0}^{(c)} - a_{ij_0} x_{j_0}^{(b)}$$

или

$$\sum_{j\neq j_0} a_{ij}u_j + a_{ij_0}x_{j_0}^{(c)} = \sum_{j\neq j_0} a_{ij}x_j^{(b)} + a_{ij_0}x_{j_0}^{(b)} = b_j\,,\ i = 1, 2, ...,\ m\,. \qquad (\text{П.8})$$

Так как набор $x_j^{(b)}$ оптимален для ограничений (5), то с учетом (П.8) получаем неравенство

$$\sum_{j\neq j_0} f_j(u_j) + f_{j_0}\left(x_{j_0}^{(c)}\right) \le \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^{(b)})\,. \qquad (\text{П.9})$$

Аналогично из оптимальности набора $x_j^{(c)}$ для ограничений (7) с учетом (П.7) следует

$$\sum_{j\neq j_0} f_j(z_j) + f_{j0}\left(x_{j_0}^{(b)}\right) \le \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^{(c)})\,. \qquad (\text{П.10})$$

Суммируя левые и правые части (П.9) и (П.10), получим

$$\sum_{j\neq j_0} f_j(u_j) + \sum_{j\neq j_0} f(z_j) + f_{j0}(x_j^{(c)}) + f_{io}(x_j^{(b)}) \le \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^{(b)}) + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j^{(c)})$$

или

$$\sum_{j\neq j_0} f_j(u_j) + \sum_{j\neq j_0} f_j(z_j) \le \sum_{j\neq j_0} f_j(x_j^{(b)}) + \sum_{j\neq j_0} f_j(x_j^{(c)})\,. \qquad (\text{П.11})$$

С другой стороны, в силу выпуклости вверх функций $f_j(x_j)$ для всех j, используя (П.3) и (П.5), получим неравенства:

$$f_j(z_j) \ge \lambda f_j(x_j^{(c)}) + (1-\lambda) f_j(x_j^{(b)})\,; \qquad (\text{П.12})$$

$$f_j(u_j) \ge (1-\lambda) f_j(x_j^{(c)}) + \lambda f_j(x_j^{(b)}),\ j \ne j_0,\ \lambda \notin [0,1], \qquad (\text{П.13})$$

откуда

$$f_j(z_j) + f_j(u_j) \ge f_j(x_j^{(c)}) + f_j(x_j^{(b)}),\ j \ne j_0\,. \qquad (\text{П.14})$$

Суммируя левые и правые части (П.14) для всех $j \ne j_0$, получим

$$\sum_{j\neq j_0} f_j(z_j) + \sum_{j\neq j_0} f_j(u_j) \ge \sum_{j\neq j_0} f_j(x_j^{(c)}) + \sum_{j\neq j_0} f_j(x_j^{(b)})\,,$$

что противоречит (П.11).

Таким образом, предположение о наличии в наборе $x_j^{(c)}$ элемента, для которого неравенство (8) не выполняется, привело к противоречию.

Теорема доказана.

Список литературы: **1.** *Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д.* Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. – М.: Сов. Радио, 1968. – 463 с. **2.** *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с. **3.** *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с. **4.** *Мину М.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1990. – 488 с. **5.** *Моисеев Н.Н, Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с. **6.** *Шелобаев С.И.* Математические методы и модели. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 367 с. **7.** *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с. **8.** *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1980. – 256 с. **9.**. *Раскин Л.Г.* Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. – М.: Сов. Радио, 1976. –344 с.

Поступила в редакцию 26.09.2005.