УДК 519.21

Л.Г. РАСКИН, д-р техн. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков),
П.Е. ПУСТОВОЙТОВ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков),
СА'ДИ АХМАД АБДЕЛЬХАМИД САЕД АХМАД, аспирант,
ЭЛЬ САЕД АБДЕЛААЛ ЭЛЬ САЕД МОХАМЕД, аспирант

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЛУМАРКОВСКИХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Отримано методику аналізу та оцінки ефективності складної багатовходової комп'ютерної мережі, поведінка якої описується напівмарковським процесом. Запропонований підхід дозволяє для вирішення задачі аналізу такої системи використовувати ефективну технологію фазового укрупнення станів, яку було розроблено для марковських цепів.

Analyzing and evaluating methods of complex many-entrance network effectivity, which behavior describes by semi-markov process. Offered method allows usage of effective technology of states faze enlargement, to solve the task, which is developed for markov chains.

Постановка проблемы. Анализ литературы. Принципиальная особенность задач анализа и оценки эффективности многовходовых компьютерных сетей состоит в том, что сложность этих задач полиноминально растет с увеличением размерности системы, определяемой числом входящих потоков заявок. Традиционно для решения таких задач используется технология, основанная на применении марковских моделей функционирования систем. Граф состояний и переходов марковской модели функционирования сети с тремя независимыми входящими потоками заявок для простейшего частного случая, когда максимальное число заявок каждого типа в системе равно трем, приведен на рисунке и достаточно наглядно иллюстрирует сложность модели.

Реальный путь преодоления возникающего здесь "проклятия размерности" состоит в декомпозиции, осуществляемой с помощью процедуры фазового укрупнения состояний системы [1, 2]. Осуществление этой идеи позволяет исходную сложную задачу свести к последовательности более простых. Известная эффективная технология фазового укрупнения состояний разработана для случая, когда моделью процесса является марковская цепь [3]. Более эффективная методика анализа многоразмерных марковских цепей предложена в [4]. Вместе с тем, реальные потоки случайных событий, определяющих функционирование сетей, не являются пуассоновскими (плотности распределения интервалов между заявками а также продолжительности их обслуживания не являются экспоненциальными). С учетом этого обстоятельства поставим задачу разработки методики анализа и оценки эффективности немарковских систем с использованием технологии фазовой декомпозиции.

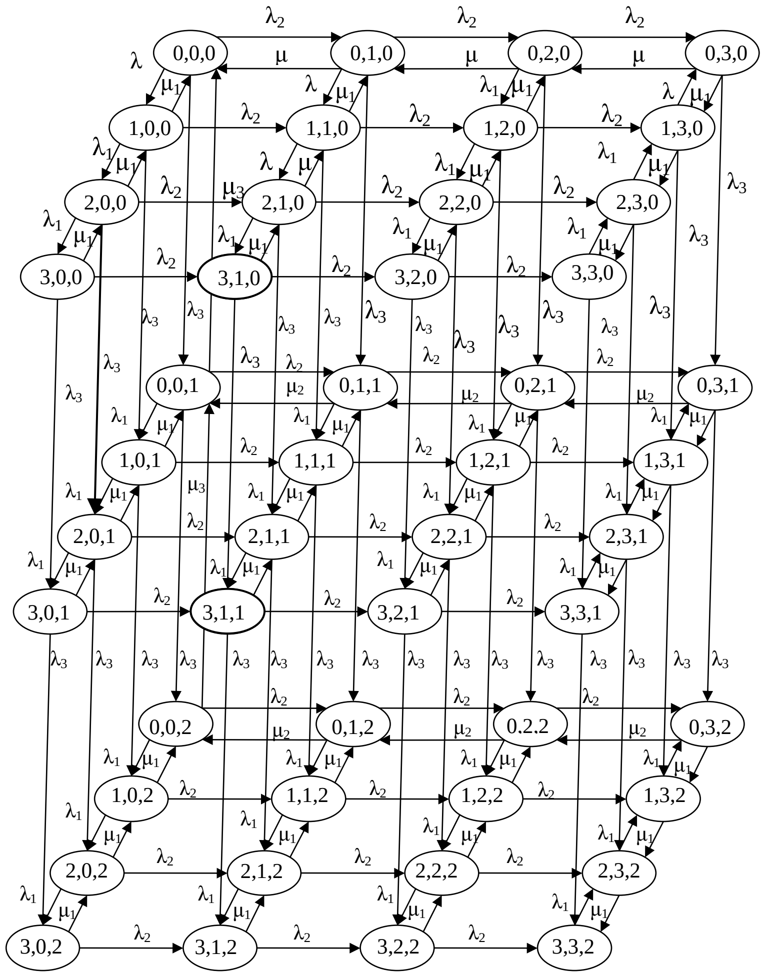

Рис. Граф состояний и переходов марковской модели функционирования сети с тремя независимыми входящими потоками заявок, когда максимальное число заявок каждого типа в системе равно трем

Пусть на вход компьютерной сети поступает суперпозиция нескольких, например m типов потоков заявок. Будем считать известными законы распределения случайной продолжительности интервалов между заявками и, кроме того, законы распределения продолжительности обслуживания для каждого из входных потоков. Функционирование системы определим как процесс случайного блуждания на множестве возможных состояний. Каждому состоянию системы поставим в соответствие m-мерный вектор, компонентами которого являются количество заявок каждого из типов, находящихся в системе. При этом состоянию $E\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_m$ соответствует ситуация, когда в системе находятся κ_i заявок i-го типа, $i=1, 2, \ldots, m$. Если при этом максимальная длина очереди для заявок i-го типа равна n_i, $i=1, 2, \ldots, m$, то общее число состояний этой системы равно $n=\prod_{i=1}^{m}(n_i+1)$. Для реальных значений m и n_i, $i=1, 2, \ldots, m$, это число состояний имеет порядок 10^5-10^6. Ясно, что такая система для анализа традиционными методами недоступна.

Целью статьи является разработка эффективной методики анализа многоразмерных компьютерных сетей. Для решения задачи предлагается следующая методика фазовой декомпозиции, основанная на укрупнении состояний системы и ориентированная на случай, когда потоки случайных событий в сети не являются марковскими.

Методика фазовой декомпозиции немарковских компьютерных сетей. Будем считать, что процесс функционирования системы является полумарковским [5 – 7]. Для описания этого процесса достаточно задать множество возможных состояний и начальное состояние, а также матрицу независимых функций распределения $Q_{ij}(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, продолжительности пребывания процесса в состоянии i до перехода в состояние *j*. Для полумарковской модели функционирования многовходовой компьютерной сети эти функции легко могут быть получены [8]. Действительно, пусть $G_i(t)$ – закон распределения случайного интервала между заявками i-го типа. Тогда, очевидно, именно этот закон определяет случайную продолжительность пребывания системы в состоянии $E\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{i-1}\kappa_i\kappa_{i+1}\ldots\kappa_m$ до ее перехода в состояние $E\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{i-1}\kappa_i+1\kappa_{i+1}\ldots\kappa_m$, $\kappa_i=0,1,2,\ldots,\ n_i$. С другой стороны, если $H_i(t)$ – закон распределения продолжительности обслуживания заявки i-го типа, то этот закон определяет продолжительность пребывания системы в состоянии $E\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{i-1}\kappa_i\kappa_{i+1}\ldots\kappa_m$ до перехода в состояние $E\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{i-1}\kappa_i-1\kappa_{i+1}\ldots\kappa_m$, $\kappa_i=0,1,2,\ldots,\ n_i$. Таким образом, при использовании одноиндексной нумерации, искомый набор независимых функций $Q_{ij}(t)$, $i=1,2,...,\ n$, $j=1,2,...,\ n$, будет получен. С использованием набора $Q_{ij}(t)$ рассчитаем вероятности $P_{ij}(t)$ перехода системы из состояния i в состояние j за время t:

$$P_{ij}(t)=\int_0^t\prod_{\kappa\neq j}(1-Q_{i\kappa}(\tau))dQ_{ij}(\tau),\ i\neq j.$$

Тогда $P_{ij}=P_{ij}(\infty)=\int_0^\infty\prod_{k\neq j}(1-Q_{ik}(\tau))dQ_{ij}(\tau)$ есть вероятность перехода из i в j вложенной в полумарковский процесс марковской цепи. Введем теперь набор условных функций распределения $F_{ij}(t)$ продолжительности пребывания в i до перехода в j при условии реализации именно этого перехода. При этом

$$F_{ij}(t)=\frac{P_{ij}(t)}{P_{ij}},\ i=1,2,...,\ n,\ j=1,2,...,\ n.$$

В результате этих действий имеем матрицу условных законов распределения $(F_{ij}(t))$ и матрицу вероятностей переходов для марковской цепи, вложенной в полумарковский процесс.

Определим, наконец, безусловные функции распределения продолжительности пребывания в i до ухода в какое-либо другое состояние

$$F_i(t)=\sum_{j\neq i}P_{ij}F_{ij}(t)=\sum_{j\neq i}P_{ij}(t).$$

Дальнейшая процедура анализа полумарковской системы состоит в расчете финального распределения вероятностей состояний системы. Расчет этого распределения выполняется в два этапа. Во-первых, используя матрицу P_{ij} вероятностей переходов вложенной марковской цепи отыщем предельное распределение $\pi=(\pi_1\pi_2\ldots\pi_n)$ вероятностей состояний системы. Во-вторых, найдем набор средних продолжительностей пребывания в каждом из состояний системы до ухода

$$T_i=\int_0^\infty(1-F_i(t))dt,\ i=1,2,...,\ n.$$

Теперь, искомый набор финальных вероятностей, P_i, $i=1,2,...,\ n$, рассчитывается по формулам

$$P_i=\frac{\pi_iT_i}{\sum_{i=1}^n\pi_iT_i},\ i=1,2,...,\ n.$$

Таким образом, исходная задача анализа асимптотического поведения полумарковского процесса редуцирована к существенно более простой задаче того же типа, но для марковской системы. При этом возможность практической реализации изложенной методики целиком зависит от возможности расчета предельного вектора $\pi=(\pi_1\pi_2\ldots\pi_n)$, которая, в свою очередь, определяется размерностью задачи. В случае, если эта размерность велика, то вектор $\pi=(\pi_1\pi_2\ldots\pi_n)$ отыскивается по методике фазового укрупнения состояний, специально ориентированной на анализ марковских цепей с большим и сверхбольшим числом состояний.

Существо этой методики применительно к задаче анализа многовходовой компьютерной сети состоит в следующем. Если ограничения на длину очереди для заявок всех типов равны e, то $n=(e+1)^m$. Это множество состояний разбивается на m подмножеств. Одно из этих подмножеств выделяется, состояния остальных укрупняются. Получаемая при этом группа укрупненных состояний вместе с состояниями выделенного подмножества образуют систему из $m+e$ состояний, обрабатываемых на очередной итерации. По полученным формулам рассчитываются вероятности переходов из укрупненных состояний в укрупненные, из укрупненных в неукрупненные и из неукрупненных в укрупненные, после чего для полученной системы рассчитывается предельный вектор. На следующей итерации разукрупнению подвергаются состояния следующего укрупненного подмножества, и эта новая система анализируется по той же схеме. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не стабилизируется получаемое на каждой итерации предельное распределение вероятностей состояний.

Выводы. Таким образом, получена методика анализа и оценки эффективности сложной многовходовой компьютерной сети, поведение которой описывается полумарковским процессом. Предложенный подход позволяет для решения задачи анализа такой системы использовать эффективную технологию фазового укрупнения состояний, разработанную для марковских цепей.

Список литературы: **1.** *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Фазовое укрупнение сложных систем. – К.: Вища школа, 1978. – 110 с. **2.** *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям. Диакоптика. – М.: ИЛ, 1965. – 216 с. **3.** *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 271 с. **4.** *Раскин Л.Г.* Анализ марковских цепей с использованием фазового укрупнения состояний // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. – Х.: ХГПУ, 1997. – С. 280–284. **5.** *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 181 с. **6.** *Сильверстов Д.С.* Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. – М.: Сов. радио, 1980. – 272 с. **7.** *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 198 с. **8.** *Крылов В.В., Самохвалова С.С.* Теория телетрафика и ее приложения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.

Поступила в редакцию 07.10.2005