УДК 17.27

И.С. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук

ЛИНЕЙНЫЕ УСЛОВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

Розглянуто умови невід‘ємності тригонометричного многочлена з косинусов $P(x)=\sum_{m=0}^{n}\gamma_m \cos mx$ з дійсними коефіцієнтами. Для $n=2,3,4$ подано лінійні умови на коефіцієнти, при яких $P(x)\ge 0, \forall x\in\Re$.

Linear conditions of nonnegativity for cosinus trigonometric poliynomial $P(x)=\sum_{m=0}^{n}\gamma_m \cos mx$ with real coefficients are considered. For $n=2,3,4$ llnear conditions on coefficients are found, for wich $P(x)\ge 0, \forall x\in\Re$.

Постановка проблемы. Нахождение асимптотики экстремумов тригонометрических полиномов играет важную роль в изучении сходимости простых и кратных рядов Фурье и задачах тригонометрической интерполяции [1, 2]. В частности, для оценки наибольшего и наименьшего значений ядер типа Дирихле, используются при доказательстве разнообразных теорем гармонического анализа [3]. Последняя задача эквивалентна нахождению условий неотрицательности тригонометрического многочлена, которая, в свою очередь, сводится к некоторой системе алгебраических уравнений [4].

Анализ литературы. В работе продолжается исследование экстремумов тригонометрических многочленов, начатое в работах [5, 6], где в частности, рассмотрена задача нахождения наименьшего и наибольшего значения ядер типа Дирихле.

Цель статьи. Исследовать некоторые примеры неотрицательных тригонометрических многочленов по косинусам.

Известно [4, с. 94], что для неотрицательности тригонометрического многочлена по косинусам $P(x)=\sum_{m=0}^{n}\gamma_m \cos mx$ с вещественными коэффициентами необходимо и достаточно существование представления

$$P(x)=\left(\sum_{m=0}^{n}a_m e^{imx}\right)\overline{\left(\sum_{m=0}^{n}a_m e^{-imx}\right)}$$

с вещественными $a_k\ (0\le k\le n)$. Это приводит к системе $(n+1)$ алгебраических уравнений второй степени с $(n+1)$ неизвестными, которую удобно записать в виде

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 = \gamma_0; \\
\sum\limits_{i=0}^{n} (a_{i-k} + a_{i+k}) a_i = \gamma_k \quad (1 \le k \le n),
\end{cases} \qquad (1)
$$

считая, что неизвестные $a_i = 0$ при $i < 0$ и $i > n$. Рассмотрим условия разрешимости системы (1) и явный вид решений для начальных значений n.

При $n = 1$ система (1) имеет вид

$$
\begin{cases}
a^2 + b^2 = \gamma_0; \\
2ab = \gamma_1.
\end{cases}
$$

Если (a_0, b_0) – решение системы, то $0 \le (a_0 \pm b_0)^2 = \gamma_0 \pm \gamma_1$, и мы получаем небходимые и достаточные условия разрешимости в виде системы линейных неравенств

$$
\begin{cases}
\gamma_0 + \gamma_1 \ge 0; \\
\gamma_0 - \gamma_1 \ge 0.
\end{cases}
$$

При этом

$$
a_0 = \frac{1}{2}((\gamma_0 + \gamma_1)^{\frac{1}{2}} + (\gamma_0 - \gamma_1)^{\frac{1}{2}});
$$

$$
b_0 = \frac{1}{2}((\gamma_0 + \gamma_1)^{\frac{1}{2}} + (\gamma_0 - \gamma_1)^{\frac{1}{2}}).
$$

При $n = 2$ система (1) имеет вид

$$
\begin{cases}
a^2 + b^2 + c^2 = \gamma_0; \\
2ab + 2ac = \gamma_1; \\
2ac = \gamma_2.
\end{cases}
$$

Если (a_0, b_0, c_0) – решение системы, то $0 \le (a_0 \pm b_0 + c_0)^2 = \gamma_0 \pm \gamma_1 + \gamma_2$, (см. [3]) и мы получаем небходимые условия разрешимости в виде системы линейных неравенств

$$
\begin{cases}
\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \ge 0; \\
\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 \ge 0.
\end{cases}
$$

Легко проверить, что достаточные условия имеют вид

$$
\gamma_0 - 3\gamma_2 \ge 0;
$$

$$8(\gamma_0 - \gamma_2)\gamma_2 \geq \gamma_1^2 .$$

При этом

$$a_0 + c_0 = \frac{1}{2}((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}} + (\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}});$$

$$b_0 = \frac{1}{2}((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}} - (\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}});$$

$$2a_0 c_0 = \gamma_2 .$$

Выделяя линейное неравенство, находим, что справедлива

Теорема 1. Если выполнены линейные условия

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0; \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0; \\ \gamma_0 - 3\gamma_2 \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

для коэффициентов тригонометрического многочлена

$$P(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x ,$$

то $P(x) \geq 0, \forall x \in \Re$.

При $n = 3$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \gamma_0; \\ 2ab + 2bc + 2cd = \gamma_1; \\ 2ac + 2bd = \gamma_2; \\ 2ad = \gamma_3. \end{cases}$$

Если (a_0, b_0, c_0, d_0) – решение системы, то, аналогично, $0 \leq (a_0 \pm b_0 + c_0 \pm d_0)^2 = \gamma_0 \pm \gamma_1 + \gamma_2 \pm \gamma_3$, и мы получаем небходимые условия разрешимости в виде системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 0; \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \geq 0. \end{cases}$$

Достаточные условия рассмотрим при дополнительном ограничении

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0 .$$

Можно проверить, что они имеют вид

$$\gamma_0 - 3\gamma_2 + 8\gamma_3 \geq 0;$$

$$\gamma_0^2 + \frac{1}{4}\gamma_2^2 - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_2) - \gamma_2\gamma_3 + 2\gamma_3 \le 0 .$$

Выделяя линейное неравенство, находим, что справедлива

Теорема 2. Если выполнены линейные условия

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ge 0; \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0; \\ \gamma_0 - 3\gamma_2 + 8\gamma_3 \ge 0, \end{cases} \tag{3}$$

для коэффициентов тригонометрического многочлена

$$P(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x + \gamma_3 \cos 3x ,$$

то $P(x) \ge 0, \forall x \in \Re$.

Выводы. Достаточные условия неотрицательности тригонометрического многочлена могут быть представлены в виде линейных неравенств (2), (3), которые удобны при проверке.

Список литературы: **1.** *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – 615 с. **2.** *Бабенко К.И.* О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. – М.: Препринт ИПМ АНСССР, № 52, 1971. – 70 с. **3.** *Stein E.M.* Harmonic Analysis. – New Jersey, Princeton University Press, l993. – 605 p. **4.** *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – Ч.2. – М.: ГИТТИ, 1956. – 432 с. **5.** *Belov I.S.* Local Extremums of Trigonometric Polynomial // Journal of Mathmatical Phisics, Analysis, Geometry. – 2007. – Vol. 3. – № 3. – P. 293 – 297. **6.** *Белов И.С., Назарова Н.Г.* О слабой сходимости итераций метода Ньютона // Вестник ХНУ им. Каразина. – 2006. – Т. 56. – С. 352 – 359.

Поступила в редакцию 12.10.2007