УДК 62-50

Н.В. МЕЗЕНЦЕВ, НТУ "ХПИ"

НОВЫЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВХОЖДЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ

Пропонуються нові модифікації методу аналітичного конструювання регуляторів за критерієм узагальненої роботи для випадку нелінійного входження трьох управлінь у систему диференціальних рівнянь, що описують об'єкт.

New modifications of a method analytical construction of regulators by criterion of generalized work for a case of nonlinear occurrence of three controls in system of differential equations describing object are offered.

Постановка проблемы. Одним из методов, позволяющих синтезировать регуляторы для объектов, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка с линейно входящими управлениями, является метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР). Основное достоинство метода – получение структуры регулятора с учетом минимизации функционала, который включает в себя несколько составляющих, позволяющих учитывать различные особенности протекания процессов в различных режимах функционирования сложных технических объектов [1, 2]. Однако непосредственное применение данного метода для случая, когда объект описывается дифференциальными уравнениями, в правые части которых входят произведения трех управлений невозможно. Поэтому является актуальной задача разработки методов синтеза регуляторов по критерию обобщенной работы и для данного типа объектов.

Анализ литературы. В натоящее время существует ряд публикаций, в которых приводится методика синтеза регуляторов для нескольких частных видов математических моделей с нелинейно входящими управлениями [3 – 8]. Практически все эти модели связаны с тяговым асинхронным электроприводом, управление которым осуществляется за счет изменения амплитуды и частоты питающего напряжения, закон изменения которого в общем случае может быть записан в виде:

$$U = u_1 \sin(u_2 t + \varphi)\,, \tag{1}$$

где u_1 – амплитуда, u_2 – частота питающего напряжения, φ – константа, задающая фазу синусоидального напряжения.

Если питание тягового асинхронного двигателя (ТАД) осуществляется через преобразователь частоты (ПЧ) с автономным инвертором напряжения (АИН) с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), то в общем случае напряжение на ТАД, усредненное за период несущей частоты (частоты модуляции) будет иметь вид [5]: $U = U_{в}\mu\sin(\omega_s t + \varphi)$, где $U_{в}$ – напряжение, поступающее от выпрямителя; μ – коэффициент глубины модуляции; ω_s – круговая частота модуляции.

Таким образом, меняя значения параметров $U_{в}$, μ и ω_s, можно осуществлять независимое управление ТАД.

Целью статьи является расширение области применения метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы для случая нелинейного вхождения трех управлений в систему дифференциальных уравнений, описывающих объект.

Основной раздел. Одна из общих формулировок основной теоремы АКОР следующая [1, 2]:

Теорема 1. Пусть объект описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t)u_j, \tag{2}$$

тогда оптимальным в смысле минимума функционала

$$I = V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \ldots, X_n, t)dt +$$

$$+\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_j}{k_j}\right)^q dt + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_j\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\right)^p dt,$$

являются управления

$$u_j = -k_j^p\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\right)^{p-1},$$

где V – решение линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}f_i = -Q, \tag{3}$$

при граничном условии

$$V\left[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2\right] = V_з\left[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2\right]. \tag{4}$$

Здесь $X_i (i = \overline{1, n})$ – фазовые координаты объекта управления; $f_i, \varphi_{ij} (i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m})$ – непрерывные заданные функции; $V_з\left[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2\right]$ – положительно определенная непрерывная функция, задающая точность приведения объекта управления в момент времени t_2 в заданную точку фазового пространства; $Q(X_1, \ldots, X_n, t)$ – положительно определенная непрерывная функция, задающая требования к качеству переходных процессов объекта по фазовым координатам в интервале времени управления $[t_1, t_2]$; p, q – положительные числа, удовлетворяющие условиям: $1/p + 1/q = 1$ и X^p, X^q – четные функции X; $k_j\,(j = \overline{1, m})$ – заданные постоянные коэффициенты; $u_j\,(j = \overline{1, m})$ – управления.

Из вида уравнений (2) теоремы 1 следует, что метод АКОР можно использовать для объектов, описываемых с помощью систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые управления u_j входят линейно. Для расширения области применения метода АКОР предлагается новая модификация метода АКОР для случая $p = q = 2$ и нелинейно входящих трех управлениях, когда используются не сами управления, а некоторые функции от них. Эта модификация основывается на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = 3\sum_{j=1}^{\mathrm{m}} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t)\psi_{1ij}(u_{1ij})\psi_{2ij}(u_{2ij})\psi_{3ij}(u_{3ij}), \quad (5)$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \ldots, X_{\mathrm{n}}(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2}\right)dt, \quad (6)$$

являются управления

$$u_{1ij} = -k_{1ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij}/u_{1ij}; \quad (7)$$

$$u_{2ij} = -k_{2ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij}/u_{2ij}; \quad (8)$$

$$u_{3ij} = -k_{3ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij}/u_{3ij}, \quad (9)$$

где V – решение уравнения (3) при граничном условии (4).

Доказательство. Полная производная функции V в силу уравнений объекта (5) и уравнения (3) равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}\left(3\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij} - f_i\right) = \quad (10)$$

$$= -Q + 3\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial X_i} \sum_{j=1}^{\mathrm{m}} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} \ .$$

Интегрируя выражение (10) в интервале времени $[t_1, t_2]$, получим

$$\begin{gathered} V[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] - V[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1), t_1] = -\int_{t_1}^{t_2} Q dt + \\ + 3\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} dt \ . \end{gathered} \tag{11}$$

Функционал (6) с учетом соотношения (11) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} I = V[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1), t_1] + \ 3\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} dt + \\ + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} \right) dt \ . \end{gathered} \tag{12}$$

Поскольку имеем

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} / u_{1ij} \right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + 2\frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} + \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} \right] = 2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + 2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} \ ;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} / u_{2ij} \right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + 2\frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} \right] = 2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + 2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} \ ;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_{3ij}}{k_{3ij}} + k_{3ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} / u_{3ij} \right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} + 2\frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} + \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} \right] = 2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} + 2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} \ ,$$

то функционал (12) можно записать в виде

$$I = V[X_1(t_1), \ldots, X_n(t_1), t_1] + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\frac{\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij}}{u_{1ij}}\right]^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij}/u_{2ij}\right]^2 dt + \tag{13}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{3ij}}{k_{3ij}} + k_{3ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}\varphi_{ij}\psi_{1ij}\psi_{2ij}\psi_{3ij}/u_{3ij}\right]^2 dt\,.$$

Если управления $u_{lij},\ l = \overline{1,\ 3},\ i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ m}$ определяются соотношениями (7) – (9), то подинтегральные выражения в функционале (13) обращаются в нуль и он принимает минимальное значение. Следовательно, теорема доказана.

Из теоремы 2 могут быть получены частные случаи, например, когда в правые части системы дифференциальных уравнений, описывающей объект, входят произведения трех управлений, то получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = 3\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t)u_{1j}u_{2j}u_{3j}\,, \tag{14}$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_з[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \ldots, X_n, t)dt + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{lj}}{k_{lj}}\right)^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{1j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}u_{3j}\right)^2 dt + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{2j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}u_{3j}\right)^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_{3j}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}u_{2j}\right)^2 dt,$$

являются управления

$$u_{1j\text{опт}} = -k_{1j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{2j}u_{3j}\right);\ u_{2j\text{опт}} = -k_{2j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}u_{3j}\right),\ ;$$

$$u_{3j\text{опт}} = -k_{3j}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{\partial V}{\partial X_i}u_{1j}u_{2j}\right),\quad j = \overline{1,\ m}\,.$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Частным случаем теоремы 2 (при $\psi_{1j} \equiv u_1$, $\psi_{2j} \equiv \sin(u_2 t + \varphi_0)$, $\psi_{3j} \equiv 1$) так же является теорема [3], где управления имеют вид (1):

Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \ldots, X_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(X_1, \ldots, X_n, t) u_1 \sin(u_2 t + \varphi_0),$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \ldots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_1^2}{k_1^2} + \frac{u_2^2}{k_2^2} \right) dt,$$

являются управления

$$u_1 = -k_1^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \sin(u_2 t + \varphi_0); \; u_2 = -k_2^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} u_1 \sin(u_2 t + \varphi_0) / u_2,$$

где V – решение уравнения (3) при граничном условии (4).

Выводы. Таким образом, доказательство теорем 2 и 3 расширило область возможного применения метода АКОР на объекты, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида (5) и (14), т.е. на объекты, в которых управления входят в виде произведений трех управлений или в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного управления. В дальнейшем предполагается обобщение полученных результатов и разработка численных методов для синтеза конкретных систем управления.

Список литературы: **1.** *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с. **2.** Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *Красовского А.А.* – М.: Наука, 1987. – 712 с. **3.** *Носков В.И., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Леонов С.Ю.* Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов. – Харьков: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. **4.** Эволюционные методы компьютерного моделирования / *Верлань А.Ф., Дмитриенко В.Д., Корсунов Н.И., Шорох В.А.*. – К.: Наук. думка, 1992. – 256 с. **5.** Тиристорные преобразователи частоты в электроприводе / *Бернштейн А.Я., Гусяцкий Ю.М., Кудрявцев А.В., Сарбатов Р.С.* / Под ред. Сарбатова Р.С. – М.: Энергия, 1980. – 328 с. **6.** *Даниленко А.Ф., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И.* Математические модели оптимальных систем управления тяговым асинхронным приводом тепловозов // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13. – № 2. – С. 40 – 44. **7.** *Дмитриенко В.Д., Носков В.И., Мезенцев Н.В.* Решение задачи оптимизации критерия обобщенной работы при нелинейно входящих управлениях. Збірник наукових праць "Системи обробки інформації". – Харків: ХВУ, 2004. – Вип. 12. – С. 37 – 45. **8.** *Дмитриенко В.Д., Носков В.И., Мезенцев Н.В.* Оптимизация функционала обобщенной работы при нелинейно входящих управлениях. Праці Луганського відділення Міжнародної Академії Автоматизації. – Луганськ: Луганське відділення Міжнародної Академії Автоматизації. – 2005. – № 1. – С. 17 – 22.

Поступила в редакцию 12.10.2007