УДК 621.391: 517. 518:510.52

В.М. УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ "ХПІ", (м. Харків)

ОПЕРАТОРИ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ, ПОБУДОВАНІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ФАЙЛОНА ТА КУБІЧНИХ В-СПЛАЙНІВ, ТОЧНІ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМАХ ЗАДАНОГО СТЕПЕНЯ

Побудовано оператори Фур'є та Хартлі на основі методу Файлона (Filon) обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів. Дані оператори є точними на тригонометричних поліномах заданого степеня. Приведені співвідношення між розглянутими операторами, графік їх дискретних нормованих амплітудно-частотних характеристик, теореми та приклад.

In this article operators Fourier and Hartley are considered. These operators are constructed on the basis of Filon's method calculations of integrals from trigonometric functions and cubic B-splines. These operators possess property - they are exact on trigonometrical polynoms of the set degree. The theorems and an example are given.

Проблема, яку ми розв'язуємо в даній роботі, полягає в побудові інструментарію інформаційних технологій в базисах Фур'є та Хартлі – операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень Фур'є (ДПФ), а також дискретно-неперервних та дискретних перетворень Хартлі (ДПХ) на основі методу Файлона та кубічних В-сплайнів, які б мали кращі характеристики точності, ніж "класичні" ДПФ та ДПХ. Тому проблема є актуальною.

В літературі, присвяченій дискретному перетворенню Фур'є та Хартлі, основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів ДПФ та ДПХ [1 – 3], порівняння швидких алгоритмів ДПФ та ДПХ [4], створення багатовимірних варіантів ДПФ та ДПХ [5]. В прикладних задачах, орієнтованих на інформаційні технології, ДПФ [2, с. 58] використовують у вигляді:

$$X[k] = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi k\,n/N),\ \ k=\overline{0,\,(N-1)},\ j=\sqrt{-1}\ ;$$

$$x[n] = (NT)^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\exp(j2\pi k\,n/N),\ \ n=\overline{0,\,(N-1)}\ ,$$

а ДПХ [3, с. 34] – у вигляді:

$$H[\nu] = N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} f[\tau]\,cas(2\pi\nu\,\tau/N),\ \ \nu=\overline{0,(N-1)}\ ;$$

$$f[\tau] = N^{-1}\sum_{\nu=0}^{N-1} H[\nu]\,cas(2\pi\nu\,\tau/N),\ \ \tau=\overline{0,(N-1)}\ ,$$

де $cas(\alpha)=\cos(\alpha)+\sin(\alpha)=\sqrt{2}\cos(\alpha-\pi/4)$, [3].

Безпосереднє використання "класичних" ДПФ та ДПХ, з точки зору характеристик точності, не є ефективне. В роботах [6, 7] запропоновано оператори дискретно-неперервних та дискретних перетворень Фур'є [6] та Хартлі [7] (скорочено $F\&H$), які побудовані на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних B-сплайнів, або скорочено $b_{Mp,\,N}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ та $L_{Mp,\,N}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$, де *F*/*H* – Фур'є або Хартлі.

Метою роботи є побудова операторів $F\&H$, на основі методу Файлона та кубічних B-сплайнів, точних на тригонометричних поліномах заданого степеня, або скорочено $g_{Mp,\,N}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ та $U_{Mp,\,N}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$, де $g_{Mp,\,N}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)$ та $U_{Mp,\,N}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)$ – відповідно прямі та оберненені оператори Фур'є, $g_{Mp,\,N}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)$ та $U_{Mp,\,N}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)$ – відповідно прямі та оберненені оператори Хартлі, які мають специфічні характеристики точності в порівнянні з [6, 7].

Побудова операторів $F\&H$ на основі методу Файлона та кубічних B-сплайнів, точних на тригонометричних поліномах заданого степеня. Під фінітними перетвореннями $F\&H$ ми розуміємо перетворення $F\&H$ від фінітної, дійсної або комплексної функції дійсного аргумента. Не зменшуючи загальності ми вважаємо, що носій функції $f(x)$, $\operatorname{supp} f(x)=D$, $D=[-\pi,\pi]$. Хай $f(x)\in C^r(D)\cap L_p(D)$, $r=1,2,3,...;$ $p=1,2$ задовольняє вимогам теореми Найквіста [8]. (Умова 1). Областю визначення дискретизованої функції $f(x_i)$ є множина елементів $\{i\Delta\}$, $i=\overline{-Mp,Mp}$, $Mp=M+1$, яка при $\Delta=2\pi/(2Mp+1)$, знаходиться на інтервалі $x\in[-\pi+\Delta/2,\,\pi-\Delta/2]$ з кроком Δ. (Умова 2). Для подальшого застосування умови 1 і 2 позначимо як умову "V".

Теорема 1. Оператори дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних B-сплайнів, які задовольняють умову "V":

$$U_{Mp,\,N}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3} f(\nu)=\sum_{k=-N}^{N} g_{Mp,\,N,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)\begin{bmatrix}\exp(jk\nu)\\ \sqrt{2}\cos(k\nu-\pi/4)\end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\nu\in\Re,\ N=Mp,$$

де

$$g_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)=\begin{cases} D(k,M,\Delta)\displaystyle\sum_{p=-Mp}^{Mp} z_p(f)\begin{bmatrix} \exp(-j\,k\,p\,\Delta) \\ \sqrt{2}\cos(k\,p\,\Delta-\pi/4)\end{bmatrix}, k\neq 0; \\ \displaystyle\sum_{p=-Mp}^{Mp} f(x_p), k=0, \end{cases} \tag{2}$$

де $D(k,M,\Delta)=\dfrac{3}{(2Mp+1)\left[4-\cos(k\,\Delta)\right]}$, $k=\overline{-Mp,Mp}$, $\Delta=\dfrac{2\pi}{2Mp+1}$;

$z_p(f)=4f(x_p)/3-\left[f(x_{p-1})+f(x_{p+1})\right]/6$, $x_p=p\,\Delta$;

$x_p\in\left[-\pi+\Delta/2,\pi-\Delta/2\right]$, $Mp=M+1$,

отримані як результат обчислення функціоналу [9]:

$$g_{Mp,\,N,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)=$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{p=-Mp}^{Mp} z_p(f)\int\limits_{(p-2)\Delta}^{(p+2)\Delta} h3(x,p,\Delta)\begin{bmatrix}\exp(-j\,k\,x)\\ cas(k\,x)\end{bmatrix}dx}{\displaystyle\sum_{p=-Mp}^{Mp}\begin{bmatrix}\exp(j\,k\,x_p)\\ cas(k\,x_p)\end{bmatrix}\int\limits_{(p-2)\Delta}^{(p+2)\Delta} h3(x,p,\Delta)\begin{bmatrix}\exp(-j\,k\,x)\\ cas(k\,x)\end{bmatrix}dx},\ N\le Mp,$$

де $h3(x,p,\Delta)=\dfrac{1}{6}\begin{cases} 0,\ x\le x_{p-2}; \\ t^3,\ x_{p-2}<x\le x_{p-1},\ t=(x-x_{p-2})/\Delta; \\ 1+3t+3t^2(1-t),\ x_{p-1}<x\le x_p,\ t=(x-x_{p-1})/\Delta; \\ 1+3(1-t)+3t(1-t)^2,\ x_p<x\le x_{p+1},\ t=(x-x_p)/\Delta; \\ (1-t)^3,\ x_{p+1}<x\le x_{p+2},\ t=(x-x_{p+1})/\Delta; \\ 0, x>x_{p+2},\ p=-Mp,-M,\dots,-1,0,1,\dots,M,\ Mp; \end{cases}$

$x_p=p\Delta$,

мають властивості:

$$1:\ U_{Mp,\,Mp}^{F,\,1d,\,Sp3}f(x)=U_{Mp,\,Mp}^{H,\,1d,\,Sp3}f(x). \tag{3}$$

Якщо $f(x)\in T_N$, де T_N є множина тригонометричних поліномів степеня N, при $N=Mp$:

$$2:\ U_{Mp,\,Mp}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}f(x)=f(x). \tag{4}$$

Тобто оператори $U_{Mp,\,Mp}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3} f(x)$ є точними на тригонометричних поліномах степеня *N*. Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

При обчислені (2) значення функції $f(x_p)$, які виходять за межі інтервалу $[-\pi,\pi]$ приймаємо: $f\lfloor x_{(M+2)} \rfloor = f(x_{-Mp})$ та $f\lfloor x_{-(M+2)} \rfloor = f(x_{Mp})$. При цьому ми користуємося властивістю періодичності частотних характеристик перетворень $F\&H$.

Оператори дискретних перетворень $F\&H$, побудовані на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, отримуємо з (1), замінюючи $\nu \in \Re$ на $x_p = p\Delta$, $p = \overline{-Mp, Mp}$:

$$U_{Mp,\,N}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3} f(x_p) = \sum_{k=-N}^{N} g_{Mp,\,N,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f) \begin{bmatrix} \exp(j\,k\,p\,\Delta) \\ \sqrt{2}\cos(k\,p\,\Delta - \pi/4) \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

$$N \le Mp, \quad p = \overline{-Mp, Mp}.$$

$g_{Mp,\,N,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ визначаються (2).

Теорема 2. Оператори дискретних перетворень $F\&H$, побудовані на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, на інтервалі $x_p \in [-\pi + \Delta/2,\ \pi - \Delta/2\,]$ мають властивості:

$$U_{Mp,\,Mp}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3} f(x_p) = f(x_p), \quad p = \overline{-Mp,\, Mp}\,, \qquad (6)$$

для функцій $f(x)$, які задовольняють умову "*V*". Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Для наступного застосування скористаємося властивістю $cas(\alpha)$:

$$cas(-\alpha) = \cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha + \pi/4)\,. \qquad (7)$$

З урахуванням (7) маємо наступні теореми:

Теорема 3.

$$\exp(\pm jx) = \left(\frac{1 \pm j}{2}\right) cas(x) + \left(\frac{1 \mp j}{2}\right) cas(-x), \quad x = \sum_{s=1}^{n} z_s\,, \quad z_s \in \Re. \qquad (8)$$

Доведення виконується із застосуванням формули Ейлера. З (8) отримуємо:

Теорема 4.

$$cas(\pm x) = \left(\frac{1 \mp j}{2}\right) \exp(jx) + \left(\frac{1 \pm j}{2}\right) \exp(-jx), \quad x = \sum_{s=1}^{n} z_s\,, \quad z_s \in \Re\,. \qquad (9)$$

Теорема 3 та теорема 4 визначають зв’язок між ядрами одновимірних ($n=1$) та *n*-вимірних перетворень $F\&H$.

Теорема 5. Для операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$, побудованих на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів [6, 7], на інтервалі $x\in[-\pi+\Delta/2,\ \pi-\Delta/2]$ виконується наступне:

$$b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)=\left(\frac{1-j}{2}\right)b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)+\left(\frac{1+j}{2}\right)b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f),$$

$$b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f)=\left(\frac{1+j}{2}\right)b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)+\left(\frac{1-j}{2}\right)b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f), \qquad (10)$$

$$k=\overline{1,Mp},$$

для функцій $f(x)$, які задовольняють умову "i". Доведення отримуємо при застосуванні до $b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,\pm k}(f)$ теореми 3.

Теорема 6. Для операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$, побудованих на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів [6, 7], на інтервалі $x\in[-\pi+\Delta/2,\ \pi-\Delta/2]$ виконується наступне:

$$b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)=\left(\frac{1+j}{2}\right)b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)+\left(\frac{1-j}{2}\right)b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f),$$

$$b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f)=\left(\frac{1-j}{2}\right)b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)+\left(\frac{1+j}{2}\right)b^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f), \qquad (11)$$

$$k=\overline{1,Mp},$$

для функцій $f(x)$, які задовольняють умову "V". Доведення отримуємо при застосуванні до $b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,\pm k}(f)$ теореми 4.

Теорема 7. Для операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$, побудованих на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів, точних (операторів) на тригонометричних поліномах заданого степеня, на інтервалі $x\in[-\pi+\Delta/2,\ \pi-\Delta/2]$ виконується наступне:

$$g^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)=\left(\frac{1-j}{2}\right)g^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)+\left(\frac{1+j}{2}\right)g^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f),$$

$$g^{F,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f)=\left(\frac{1+j}{2}\right)g^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,-k}(f)+\left(\frac{1-j}{2}\right)g^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,+k}(f), \qquad (12)$$

$$k=\overline{1,Mp},$$

для функцій $f(x)$, які задовольняють умову "V". Доведення отримуємо при застосуванні до $g_{Mp,\,Mp,\,\pm k}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)$ теореми 3.

Теорема 8. Для операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$, побудованих на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів, точних (операторів) на тригонометричних поліномах заданого степеня, на інтервалі $x\in[-\pi+\Delta/2,\ \pi-\Delta/2]$ виконується наступне:

$$g_{Mp,\,Mp,\,-k}^{H,\,1d,\,Sp3}(f)=\left(\frac{1+j}{2}\right)g_{Mp,\,Mp,\,-k}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)+\left(\frac{1-j}{2}\right)g_{Mp,\,Mp,\,+k}^{F,\,1d,\,Sp3}(f),$$

$$g_{Mp,\,Mp,\,+k}^{H,\,1d,\,Sp3}(f)=\left(\frac{1-j}{2}\right)g_{Mp,\,Mp,\,-k}^{F,\,1d,\,Sp3}(f)+\left(\frac{1+j}{2}\right)g_{Mp,\,Mp,\,+k}^{F,\,1d,\,Sp3}(f), \qquad (13)$$

$$k=\overline{1,Mp}\,,$$

для функцій $f(x)$, які задовольняють умову "V". Доведення отримуємо при застосуванні до $g_{Mp,\,Mp,\,\pm k}^{H,\,1d,\,Sp3}(f)$ теореми 4.

Користуючись твердженнями теореми 5 та теореми 7, для порівняння властивостей операторів $g_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ та $b_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ на рис. приведено графіки односторонніх, дискретних амплітудно-частотних характеристик $g_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ та $b_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ [6, 7].

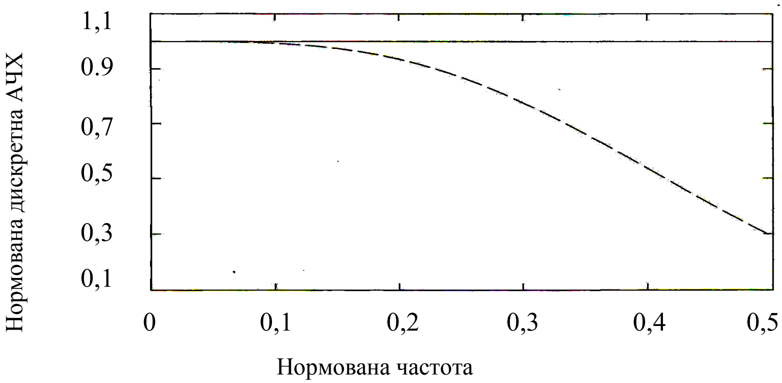

Рис. Оператори $b_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ -line dash, $g_{Mp,\,Mp,\,k}^{F\backslash H,\,1d,\,Sp3}(f)$ -line solid.

Дискретні амплітудно-частотні характеристики $g^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,k}(f)$ та $b^{H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,k}(f)$ приведені до базису Фур'є.

В табл. 1 наведені значення K_PosL – коефіцієнта послаблення на кінці частотного діапазону односторонніх, дискретних АЧХ для операторів $b^{F\backslash H,1d,Sp3}_{Mp,Mp,k}(f)$ (в децибелах).

Таблиця 1

M	10	30	50	70	90
K_PosL	–9,81	–10,71	–10,92	–11,01	–11,06

Тестовий приклад. В табл. 2 наведені результати обчислення оцінки приведених похибок наближення модуля функції $f(x)=u(x)-Tr\left[u(x)\right]$, де: $u(x)=x^2\, e^{-0,37x}\sin(13\,x/\sqrt{7}+0,23)+j\,e^{0,71x}\,(x-1)\cos(29\,x/\sqrt{11}-0,47)$.
$Tr\left[u(x)\right]$ є лінійний тренд $u(x)$ [8].

Таблиця 2

M	R	α1	α2	$kCzU$	$kCwU$	$kL2U$
10	55	1,14 E–1	9,14 E–2	7,8 E+13	1,02	1,65
30	155	2,76 E–2	2,69 E–2	2,0 E+13	1,23	2,32
60	305	1,37 E–2	1,32 E–2	3,0 E+12	1,30	2,39

Продовження таблиці 2.

β1U	β2U	β1	β2	$kL2L$	k_vdL
1,12 E–1	1,2 E–15	2,22 E–1	1,49 E–1	0,415	2,63
2,25 E–2	1,7 E–15	3,01 E–2	2,24 E–2	1,04	7,21
1,05 E–2	4,2 E–15	1,19 E–2	7,86 E–3	1,46	14,1

В табл. 2 використанні наступні позначення:
$\alpha 1=\max\limits_{-R\le r\le R}\left|\mu(x_r)\right|/\Theta$; $\alpha 2=\max\limits_{-Mp\le r\le Mp}\left|\mu(x_r)\right|/\Theta$; $\mu(x_r)=f(x_r)-S^{F\backslash H}_{Mp}f(x_r)$; $S^{F\backslash H}_{Mp}f(x_r)$ – сума Фур'є (Хартлі) відповідно. N – порядок тригонометричного полінома (для $N=Mp$, $R=k\,Mp$, де $k=5$ – кількість інтервалів інтерполяції на інтервалі $\left[x_k,\,x_{k+1}\right]$ довжини $\Delta=2\pi/(2M+3)$);

$$\Theta = \max_{-R \le r \le R} \left| f(x_r) \right|, \quad \beta 1U = \max_{-R \le r \le R} \left| \lambda(x_r) \right| / \Theta; \quad \lambda(x_r) = f(x_r) - U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp} f(x_r);$$

$$\beta 2U = \max_{-Mp \le r \le Mp} \left| \lambda(x_r) \right| / \Theta; \qquad \beta 1 = \max_{-R \le r \le R} \left| \chi(x_r) \right| / \Theta; \qquad \beta 2 = \max_{-Mp \le r \le Mp} \left| \chi(x_r) \right| / \Theta;$$

$$\chi(x_r) = f(x_r) - L^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp} f(x_r); \qquad \Omega 1 = \int_{-Mp\,\Delta}^{Mp\,\Delta} \left[f(x) - S^{F\backslash H}_{Mp} f(x) \right]^2 dx;$$

$$\Omega 2U = \int_{-Mp\,\Delta}^{Mp\,\Delta} \left[f(x) - U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp} f(x) \right]^2 dx; \quad \Omega 2L = \int_{-Mp\,\Delta}^{Mp\,\Delta} \left[f(x) - L^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp} f(x) \right]^2 dx$$

– оцінки похибки наближення функції $f(x)$, $x \in [-\pi + \Delta/2, \pi - \Delta/2]$ в нормі L_2 за допомогою суми Фур'є (Хартлі) та операторів $U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp}(f)$, $L^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp}(f)$ відповідно. $U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp}(f)$ – оператори, що визначаються (1). $L^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp}(f)$ – оператори, що визначаються [6, 7]. $kCwU = \alpha 1 / \beta 1U$, $kCzU = \alpha 2 / \beta 2U$, $kL2U = \Omega 1 / \Omega 2U$, $kL2L = \Omega 1 / \Omega 2L$ – оцінки ефективності наближення функції $f(x)$ операторами $U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp}(f)$ та $L^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp}(f)$ відповідно, в порівнянні з наближенням функції $f(x)$ за допомогою сум Фур'є (Хартлі) відповідно, на інтервалі $x \in [-\pi + \Delta/2, \pi - \Delta/2]$ в нормі C та в нормі L_2. k_vdL – кількість відліків на один період компоненти $f(x)$ з максимальною частотою.

Висновки. 1. Побудовано оператори дискретно-неперервних перетворень $F \& H$ на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня $U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, N} f(\nu)$, $g^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp, k}(f)$. Визначено їх властивості (3), (4), (6). Наведено графіки односторонніх, дискретних АЧХ $g^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp, k}(f)$ та $b^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp, k}(f)$ та оцінки коефіцієнта послаблення АЧХ на кінці частотного діапазона для операторів $b^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp, k}(f)$. 2. Побудовано оператори дискретних перетворень $F \& H$ на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та кубічних В-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня $U^{F\backslash H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp} f(x_p)$. 3. Наведено теореми 3, 4, які визначають зв'язок між ядрами одновимірних ($n=1$) та n-вимірних перетворень $F \& H$. 4. Наведени співвідношення (10), (11) між операторами $b^{F, 1d, Sp3}_{Mp, Mp, \pm k}(f)$ та $b^{H, 1d, Sp3}_{Mp, Mp, \pm k}(f)$.

5. Наведени співвідношення (12), (13) між операторами $g_{Mp,\, Mp,\, \pm k}^{F,\, 1d,\, Sp3}(f)$ та $g_{Mp,\, Mp,\, \pm k}^{H,\, 1d,\, Sp3}(f)$. 6. Наведено тестовий приклад, який підтверджує отримані теоретичні твердження. 7. Отримані оператори $U_{Mp,\, N}^{F,\, 1d,\, Sp3} f(\nu)$ та $U_{Mp,\, N}^{H,\, 1d,\, Sp3} f(\nu)$ доповнюють існуючий інструментарій інформаційних технологій в базисах $F \& H$. 8. Побудовані оператори $F \& H$ є подальшим розвитком методу Файлона [10] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.

Перспективи досліджень у даному напрямку автор вбачає у застосуванні запропонованих оператори $F \& H$ при вирішені деяких задач інформаційних технологій, наприклад, в системах автоматичного управління та регулювання, які застосовують сигнальні методи; у задачах математичного моделювання та комп'ютерної діагностики, у відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінювання сигналів у цифровій обробці сигналів, у вимірювальній техніці при побудові комп'ютерних вимірювальних засобів, при побудові різноманітних систем кріптографії тощо.

Список літератури: **1.** *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с. **2.** *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 684 с. **3.** *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с. **4.** *Болд Э.Дж.* Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 184–185. **5.** *Маккленнан Дж.Х.* Многомерный спектральный анализ // ТИИЭР. – 1982 – Т. 70. – № 9. – С. 139–152. **6.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори обчислення одновимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'е на основі В-сплайнів третього степеня // Вестник НТУ "ХПІ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Электроэнергетика и преобразовательная техника". – 2004. – № 4. – С. 59–65. **7.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори обчислення одновимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі В-сплайнів третього степеня // Вестник НТУ "ХПІ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Інформатика и моделирование". – 2003. – № 19. – С. 95–100. **8.** *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с. **9.** *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с. **10**. *FilonL.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy.Soc. Edinburgh. – 1928. – P. 38–47.

Поступила в редакцію 28. 03. 2007