УДК 621.391: 517. 518:510.52

В.М.УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ "ХПІ", (м. Харків)

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

Сформульовані та доведені теореми, що встановлюють взаємозв'язок інтегралів Фур'є та Хартлі для неперіодичних та фінітних функцій. Дані теореми є узагальненням відповідних теорем, які встановлюють взаємозв'язок між операторами обчислення дискретних та дискретно-неперервних перетворень Фур'є та Хартлі. Наведені тестові приклади.

Ключьові слова: інтеграли Фур'є, інтеграли Хартлі, взаємозв'язок інтегралів Фур'є та Хартлі.

Постановка проблеми. Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає в доповнені інструментарію інформаційних технологій у базисах Фур'є та Хартлі (скорочено $F\&H$) [1, 2] відповідними теоремами, які встановлюють зв'язок між інтегралами $F\&H$ для неперіодичних та фінітних функцій. Ці теореми є узагальненням відповідних теорем, які були раніше сформульовані для операторів перетворень $F\&H$ і потрібні для подальшої розбудови інструментарію інформаційних технологій у базисах $F\&H$. Тому проблема є актуальною.

Аналіз літератури. У літературі присвяченій застосуванню перетворень $F\&H$, основними напрямками досліджень є теоретичні аспекти перетворень $F\&H$ та їх застосування для вирішення практичних задач обробки сигналів [3 – 6], порівняння швидких алгоритмів дискретних перетворень $F\&H$ [7], створення багатовимірних варіантів дискретних перетворень $F\&H$ [8], але відсутні теореми, що встановлюють взаємозв'язок інтегралів $F\&H$.

Метою роботи є формулювання та доведення теорем, що встановлюють взаємозв'язок інтегралів Фур'є та Хартлі для неперіодичних та фінітних функцій з метою подальшого їх застосування для розбудови інструментарію інформаційних технологій в базисах $F\&H$.

Побудова теорем, що встановлюють взаємозв'язок інтегралів $F\&H$ для неперіодичних та фінітних функцій.

*Випадок 1***.** Відомо [4, 6], прямі перетворення $F\&H$ неперіодичної, абсолютно інтегрованої функції $f(t)$, $\mathrm{Re}\left[f(t)\right],\mathrm{Im}\left[f(t)\right]\in C(D)$, $D=(-\infty,\ \infty)$, (C – множина комплексних функцій дійсного аргументу.

Умова V), можуть бути представлені у вигляді:

$$\Theta_{\rho}^{F\backslash H}(f)=G\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\begin{bmatrix}\exp(-j2\pi t\rho)\\ cas(2\pi t\rho)\end{bmatrix}dt,\ \rho\in\Re, \tag{1}$$

де $F\backslash H$ – скорочення "Фур'є або Хартлі", $\Re$ – множина дійсних чисел, $cas(\alpha)=\cos(\alpha)+\sin(\alpha)$, $G=1/(2\pi)$, $j=\sqrt{-1}$.

Представимо $\Re$ у вигляді: $\Re = \Re^{+} \bigcup \Re^{0} \bigcup \Re^{-}$, де $\Re^{+}$ – підмножина $\Re$, множина додатніх дійсних чисел; $\Re^{-}$ – підмножина $\Re$, множина від'ємних дійсних чисел. Введемо позначення:

$$\nu_{-1} \in \Re^{-},\ \nu_{+1} \in \Re^{+},\ \nu_{+1} = -\nu_{-1}. \tag{2}$$

З урахуванням (2) із (1) отримуємо:

$$\Theta_{\nu_{\mp 1}}^{F\backslash H}(f) = G \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \begin{bmatrix} \exp(-j\,2\pi t \nu_{\mp 1}) \\ cas(2\pi t \nu_{\mp 1}) \end{bmatrix} dt. \tag{3}$$

Для подальшого застосування наводимо пряму та обернену теореми Удовиченка В.М. [9, 10]:

$$\exp(\pm j\alpha) = \left(\frac{1 \pm j}{2}\right) cas(\alpha) + \left(\frac{1 \mp j}{2}\right) cas(-\alpha),\ \alpha \in \Re, \tag{4}$$

$$cas(\pm\alpha) = \left(\frac{1 \mp j}{2}\right) \exp(j\alpha) + \left(\frac{1 \pm j}{2}\right) \exp(-j\alpha),\ \alpha \in \Re. \tag{5}$$

Теорема 1. (Удовиченко В.М.) Для інтегралів (3) виконується наступне:

$$\Theta_{\nu_{\mp 1}}^{F\backslash H}(f) = \left(\frac{1 \mp j}{2}\right) \Theta_{\nu_{\mp 1}}^{H\backslash F}(f) + \left(\frac{1 \pm j}{2}\right) \Theta_{\nu_{\pm 1}}^{H\backslash F}(f). \tag{6}$$

Доведення виконується шляхом застосування до (3) теорем (4), (5).

Випадок 2. Відомо [4, 6], прямі перетворення $F \& H$ фінітної, абсолютно інтегрованої функції $f(t)$, $\operatorname{supp} f(t) = D$, $D = [-\pi, \pi]$, $f(t) \in C(D)$, можуть бути представлені у вигляді:

$$\Omega_{\rho}^{F\backslash H}(f) = G \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \begin{bmatrix} \exp(-j\,2\pi t \rho) \\ cas(2\pi t \rho) \end{bmatrix} dt,\ \rho \in \Re. \tag{7}$$

З урахуванням (2) із (7) отримуємо::

$$\Omega_{\nu_{\mp 1}}^{F\backslash H}(f) = G \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \begin{bmatrix} \exp(-j\,2\pi t \nu_{\mp 1}) \\ cas(2\pi t \nu_{\mp 1}) \end{bmatrix} dt, \tag{8}$$

Теорема 2. (Удовиченко В.М.) Для інтегралів (8), виконується наступне:

$$\Omega_{\nu_{\mp 1}}^{F\backslash H}(f) = \left(\frac{1 \mp j}{2}\right) \Omega_{\nu_{\mp 1}}^{H\backslash F}(f) + \left(\frac{1 \pm j}{2}\right) \Omega_{\nu_{\pm 1}}^{H\backslash F}(f). \tag{9}$$

Доведення частини першої – $\Omega_{\nu_{\mp 1}}^{F}(f)$ теореми 2 виконуємо із використанням (4):

$$\Omega_{\nu_{\mp 1}}^{F}(f) = G \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\exp(-j\,2\pi t \nu_{\mp 1})\right] dt =$$

$$=G\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\left(\frac{1\mp j}{2}\right)cas(2\pi t\nu_{\mp 1})+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)cas(-2\pi t\nu_{\mp 1})\right]dt=$$

$$=\left(\frac{1\mp j}{2}\right)G\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,cas(2\pi t\nu_{\mp 1})\,dt+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)G\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,cas(2\pi t\nu_{\pm 1})\,dt=$$

$$=\left(\frac{1\mp j}{2}\right)\Omega^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)\Omega^{H}_{\nu_{\pm 1}}(f).$$

Частина перша – $\Omega^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ теореми 2 доведена. Доведення частини другої – $\Omega^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ теореми 2 виконується із використанням (5) аналогічно.

Хай $\bar{\Omega}^{F\backslash H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, $\tilde{\Omega}^{F\backslash H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ – значення інтегралів $F\backslash H$, які ми отримуємо при обчислені дійсних та комплексних функцій дійсного аргументу $f(\circ)$ відповідно. Функції $f(\circ)$ задовольняють умову V.

Наслідок 1. Для інтегралів Фур’є $\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, які ми обчислюємо через інтеграли Хартлі $\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, безпосередньо із (9) отримуємо:

$$\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)=\left\{\left[\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{-1}}(f)+\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{+1}}(f)\right]\pm j\left[\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{+1}}(f)-\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{-1}}(f)\right]\right\}/2. \quad (10)$$

Наслідок 2. Для інтегралів Хартлі $\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, які ми обчислюємо через інтеграли Фур’є $\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ безпосередньо із (9) з урахуванням (10) отримуємо:

$$\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)=\mathrm{Re}\left[\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{+1}}(f)\right]\pm\mathrm{Im}\left[\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{+1}}(f)\right]. \quad (11)$$

Наслідок 3. Для інтегралів Фур’є $\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, які ми обчислюємо через інтеграли Хартлі $\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, безпосередньо із (9) отримуємо:

$$\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)=\left[\,(a\pm b+c\mp d)+j(b\mp a+d\pm c)\,\right]/2, \quad (12)$$

де $a=\mathrm{Re}\left[\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{-1}}(f)\right]$, $b=\mathrm{Im}\left[\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{-1}}(f)\right]$, $c=\mathrm{Re}\left[\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{+1}}(f)\right]$, $d=\mathrm{Im}\left[\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{+1}}(f)\right]$.

Наслідок 4. Для інтегралів Хартлі $\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, які ми обчислюємо через інтеграли Фур’є $\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{\mp 1}}(f)$, безпосередньо із (9) отримуємо:

$$\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{\mp 1}}(f)=\left[\,(a\mp b+c\pm d)+j(b\pm a+d\mp c)\,\right]/2, \quad (13)$$

де $a=\mathrm{Re}\left[\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{-1}}(f)\right]$, $b=\mathrm{Im}\left[\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{-1}}(f)\right]$, $c=\mathrm{Re}\left[\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{+1}}(f)\right]$, $d=\mathrm{Im}\left[\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{+1}}(f)\right]$.

Тестовий приклад 1. У табл. 1 наведені результати обчислення інтегралів $\bar{\Omega}^{F\backslash H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ для функції $f(t)=\exp(-t^2)\sin(\sqrt{\pi}\,t+\pi/7)$ при значеннях $|\nu_{\mp 1}|$, наведених у табл. 1.

Таблиця 1

$\lvert\nu_{\mp 1}\rvert$	$\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{-1}}(f)$	$\bar{\Omega}^{F}_{\nu_{+1}}(f)$	$\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{-1}}(f)$	$\bar{\Omega}^{H}_{\nu_{+1}}(f)$
0,173	6,234144E–2+ +9,653876jE–2	6,234144E–2– –9,65388jE–2	–3,41973E–2	1,588802E–1
0,435	4,89708E–2+ +1,000993jE–1	4,89708E–2+ +1,00099jE–1	–5,112853E–2	1,490701E–1
0,577	2,598083E–2+ +5,37760jE–2	2,598083E–2– –5,37760jE–2	–2,77951E–2	7,975679E–2

Наведені в табл. 1 результати обчислення інтегралів $\bar{\Omega}^{F\backslash H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ задовольняють вимогам (10), (11) і, таким чином, підтверджують справедливість наслідків 1, 2.

Тестовий приклад 2. У табл. 2 наведені результати обчислення інтегралів $\tilde{\Omega}^{F\backslash H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ для функції $f(t)=\exp(-t^2)\Big[\sin(\sqrt{\pi}\,t+\pi/7)-$ $-j\,0{,}37\sin(\sqrt{\pi}\,t/3+\pi/5)\Big]$ при значеннях $|\nu_{\mp 1}|$, наведених у табл. 2.

Таблиця 2

$\lvert\nu_{\mp 1}\rvert$	$\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{-1}}(f)$	$\tilde{\Omega}^{F}_{\nu_{+1}}(f)$	$\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{-1}}(f)$	$\tilde{\Omega}^{H}_{\nu_{+1}}(f)$
0,173	8,11547E–2+ 5,251929+jE–2	4,352818E–2– –1,40558jE–1	4,411973E–2– –2,52062jE–2	1,5888E–1– –6,28327jE–2
0,435	597072E–2+ +8,842455jE–2	3,82343E–2– –1,11774jE–1	–5,11285E–2– –9,38223jE–4	1,4907E–1– –2,24112jE–2
0,577	2,970907E–2+ +5,03467jE–2	2,22526E–2– –5,72052jE–2	–2,77951E–2+ +2,98957jE–4	7,97568E–2– –7,15751jE–3

Наведені у табл. 2 результати обчислення інтегралів $\tilde{\Omega}^{F\backslash H}_{\nu_{\mp 1}}(f)$ задовольняють вимогам (12), (13) і, таким чином, підтверджують справедливість наслідків 3, 4.

Висновки. 1. Сформульована і доведена теорема, яка встановлює зв’язок між інтегралами $F\&H$ у випадку неперіодичної функції (6). 2. Сформульована і доведена теорема, яка встановлює зв’язок між інтегралами $F\&H$ у випадку фінітної функції (9). 3. Наведені наслідки до теореми 2, (10) –

(13), які важливі для практичного застосування теореми 2. 4. Наведені тестові приклади, які підтверджують отримані теоретичні твердження.

Перспективи досліджень у даному напрямку автор вбачає у застосуванні наведених теорем при подальшій розбудові інструментарію інформаційних технологій у базисах $F\&H$ [1], [2].

Список літератури: **1.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Хартлі // Вестник НТУ "ХПІ". – Х.: НТУ "ХПІ", 2006. – Вип. 38. – С. 69-74. **2.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Фур'є // Вестник НТУ "ХПІ": – Х.: НТУ "ХПІ". – 2007. – Вип. 10. – С. 119-127. **3.** *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с. **4.** *Макс .Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х томах. Т.1. – М.: Мир, 1983. – 311 с. **5.** *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 684 с. **6.** *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с. **7.** *Болд Э.Дж.* Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 184-185. **8.** *Маккленнан Дж. Х.* Многомерный спектральный анализ // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 9. – С. 139-152. **9.** *Удовиченко В.М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та кубічних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня // Вестник НТУ "ХПІ". – Х.: НТУ "ХПІ". – 2007. – Вип. 19. – № 8. – С. 182-190. **10.** *Удовиченко В.М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та В-сплайнів п'ятого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня // Вестник НТУ "ХПІ". – Х.: НТУ "ХПІ", 2007. – Вип. 35. – С. 3-12.

УДК 621.391: 517. 518:510.52

Взаимосвязь интегралов Фурье и Хартли / Удовиченко В.Н. // Вестник НТУ "ХПИ". Тематический выпуск: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – № 49. – С. 179 – 183.

Сформулированы и доказаны теоремы, устанавливающие взаимосвязь между интегралами Фурье и интегралами Хартли для непериодических и финитных функций. Данные теоремы являются обобщением соответствующих теорем, которые устанавливают взаимосвязь между операторами вычисления дискретных и дискретно-непрерывных преобразований Фурье и преобразований Хартли. Приведены тестовые примеры. Бібліогр.: 10 назв.

Ключевые слова: интегралы Фурье, интегралы Хартли, взаимосвязь нтегралов Фурье и Хартли.

UDC 621.391: 517. 518:510.52

The interrelation between integrals of Fourier and integrals of Hartley / Udovychenko V.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2008. – № 49. – P. 179 – 183.

The theorems establishing interrelation between integrals of Fourier and integrals of Hartley for acyclic and limited function are formulated and proved. These theorems are generalisation of the corresponding theorems, establishing interrelation between operators of calculations of discrete and discrete-continuous transformations of Fourier and transformations of Hartley. Test examples are resulted. Refs: 10 titles.

Key words: integrals of Fourier, integrals of Hartley, the integrals Fourier and Hartley.

Поступила в редколегію 05. 10.2008