

И.С. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук

ЛИНЕЙНЫЕ УСЛОВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

Рассмотрены условия неотрицательности тригонометрического многочлена из косинусов $P(x) = \sum_{m=0}^n \gamma_m \cos mx$ с действительными коэффициентами. Для $n = 2, 3, 4$ приведены линейные условия на коэффициенты, при которых $P(x) \geq 0, \forall x \in R$.

Ключові слова: тригонометрический многочлен, неотъемлемость, линейные условия.

Постановка проблемы. Нахождение асимптотики экстремумов тригонометрических полиномов играет важную роль в изучении сходимости простых и кратных рядов Фурье и задачах тригонометрической интерполяции [1, 2]. В частности, оценки наибольшего и наименьшего значений ядер типа Дирихле используются при доказательстве разнообразных теорем гармонического анализа [3]. Последняя задача эквивалентна нахождению условий неотрицательности тригонометрического многочлена, которые, в свою очередь, сводятся к некоторой системе алгебраических уравнений [4].

Анализ литературы. В работе продолжается исследование экстремумов тригонометрических многочленов, начатое в работах [5, 6], где, в частности, рассмотрена задача нахождения наименьшего и наибольшего значений ядер типа Дирихле.

Цель статьи. Исследовать некоторые примеры неотрицательных тригонометрических многочленов по косинусам.

Известно [4, с. 94], что для неотрицательности тригонометрического многочлена по косинусам $P(x) = \sum_{m=0}^n \gamma_m \cos mx$ с вещественными коэффициентами необходимо и достаточно существование представления

$$P(x) = \left(\sum_{k=0}^n a_k e^{ikx} \right) \overline{\left(\sum_{k=0}^n a_k e^{ikx} \right)}$$

с вещественными коэффициентами a_k ($0 \leq k \leq n$). Это приводит к системе $(n+1)$ алгебраических уравнений второй степени с $(n+1)$ неизвестными, которую удобно записать в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i^2 = \gamma_0, \\ \sum_{i=0}^n (a_{i-k} + a_{i+k}) a_i = \gamma_k \quad (1 \leq k \leq n), \end{cases} \quad (1)$$

считая, что неизвестные $a_i = 0$ при $i < 0$ и $i > n$. Рассмотрим условия разрешимости системы (1) и явный вид решений для начальных значений n .

При $n = 1$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \gamma_0, \\ 2ab = \gamma_1. \end{cases}$$

Если (a_0, b_0) – решение системмы, то $0 \leq (a_0 \pm b_0)^2 = \gamma_0 \pm \gamma_1$, и мы получаем необходимые и достаточные условия разрешимости в виде системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 \geq 0, \\ \gamma_0 - \gamma_1 \geq 0. \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \left((\gamma_0 + \gamma_1)^{\frac{1}{2}} + (\gamma_0 - \gamma_1)^{\frac{1}{2}} \right), \\ b_0 &= \frac{1}{2} \left((\gamma_0 + \gamma_1)^{\frac{1}{2}} - (\gamma_0 - \gamma_1)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

При $n = 2$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \gamma_0, \\ 2ab + 2bc = \gamma_1, \\ 2ac = \gamma_2. \end{cases}$$

Если (a_0, b_0, c_0) – решение системы, то $0 \leq (a_0 \pm b_0 + c_0)^2 = \gamma_0 \pm \gamma_1 + \gamma_2$, (см. [6]) и мы получаем необходимые условия разрешимости в виде системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0, \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0. \end{cases}$$

Можно проверить, что достаточные условия, (которые и необходимы), имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_0 - 3\gamma_2 \geq 0, \\ 8(\gamma_0 - \gamma_2)\gamma_2 \geq \gamma_1^2. \end{cases}$$

При этом

$$a_0 + c_0 = \frac{1}{2} \left((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}} + (\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

и

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{2} \left((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}} - (\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{2}} \right), \\ 2a_0c_0 = \gamma_2. \end{cases}$$

Выделяя линейное неравенство, находим, что справедлива
Теорема 1. Если выполнены линейные условия

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0, \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0, \\ \gamma_0 - 3\gamma_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

для коэффициентов тригонометрического многочлена

$$P(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x,$$

то $P(x) \geq 0, \forall x \in R$.

При $n = 3$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \gamma_0, \\ 2ab + 2bc + 2cd = \gamma_1, \\ 2ac + 2bd = \gamma_2, \\ 2ad = \gamma_3. \end{cases}$$

Если (a_0, b_0, c_0, d_0) – решение системы, то, аналогично,
 $0 \leq (a_0 \pm b_0 + c_0 \pm d_0)^2 = \gamma_0 \pm \gamma_1 + \gamma_2 \pm \gamma_3$, и мы получаем необходимые условия разрешимости в виде системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 0, \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \geq 0. \end{cases}$$

Для нахождения достаточных условий (отличных при $n = 3$ от необходимых) удобно перейти к переменным x, y, z, w , выполнив преобразование Уолша

$$x = a + b + c + d, \quad y = a - b + c - d, \quad z = a + b - c - d, \quad w = a - b - c + d.$$

При этом для $s_2 = \gamma_0 - \gamma_2$, $s_{2a} = \gamma_0 + \gamma_2$ имеем $x^2 + y^2 = 2s_{2a}$, $z^2 + w^2 = 2s_2$, откуда

$$x = \sqrt{2s_{2a} \cos \varphi}, \quad y = \sqrt{2s_{2a} \sin \varphi}, \quad z = \sqrt{2s_2 \cos \psi}, \quad w = \sqrt{2s_2 \sin \psi},$$

$$(0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi).$$

Используя выпуклость множества неотрицательных тригонометрических многочленов и легко проверяемую принадлежность к нему конкретных многочленов при подходящих значениях параметров φ, ψ , убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. Если выполнены линейные условия

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 0, \\ \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 \geq 0, \\ \gamma_0 - \gamma_2 \geq 0, \\ \gamma_1 - 3\gamma_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

для коэффициентов тригонометрического многочлена

$$P(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x + \gamma_3 \cos 3x,$$

то $P(x) \geq 0$, $\forall x \in R$.

Некоторыми свойствами, аналогичными системе (1), обладает система тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin a_1 \dots \cos a_k \dots \cos a_n - \cos a_1 \dots \sin a_k \dots \sin a_n = \gamma_1, \\ \cos a_1 \dots \sin a_k \dots \cos a_n - \sin a_1 \dots \cos a_k \dots \sin a_n = \gamma_k, \quad (1 \leq k \leq n), \\ \cos a_1 \dots \sin a_k \dots \sin a_n - \sin a_1 \dots \sin a_k \dots \cos a_n = \gamma_n. \end{cases} \quad (4)$$

Решения этой системы находятся просто для n , являющихся степенями двойки. Например, при $n = 4$ для системы

$$\begin{cases} \sin a \cos b \cos c \cos d - \cos a \sin b \sin c \sin d = \gamma_1, \\ \cos a \sin b \cos c \cos d - \sin a \cos b \sin c \sin d = \gamma_2, \\ \cos a \cos b \sin c \cos d - \sin a_1 \sin b \cos c \sin d = \gamma_3, \\ \cos a \cos b \cos c \sin d - \sin a \sin b \sin c \cos d = \gamma_4, \end{cases} \quad (5)$$

справедливо следующее

Предложение 1. Если суммы

$$\begin{aligned}s1 &= \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad s2 = \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3, \\ s3 &= \gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3, \quad s4 = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3.\end{aligned}$$

все по модулю не превосходят единицы, то общее решение системы (5) может быть представлено в виде

$$\begin{cases} a = (\text{Arc sin}(s1) + \text{Arc sin}(s2) + \text{Arc sin}(s3) + \text{Arc sin}(s4)) / 4, \\ b = (\text{Arc sin}(s1) - \text{Arc sin}(s2) + \text{Arc sin}(s3) - \text{Arc sin}(s4)) / 4, \\ c = (\text{Arc sin}(s1) + \text{Arc sin}(s2) - \text{Arc sin}(s3) - \text{Arc sin}(s4)) / 4, \\ a = (\text{Arc sin}(s1) - \text{Arc sin}(s2) - \text{Arc sin}(s3) + \text{Arc sin}(s4)) / 4, \end{cases}$$

если же этим свойством обладают только некоторые из них (например, $s1$), то к ним сходятся соответствующие линейные функции от итераций метода Ньютона (если $s1 \geq 0$, к нему сходится $(a_n + b_n + c_n + d_n)$ и т.д. (ср. [5])).

Для n , не являющихся степенями двойки, положение более сложное. Например, при $n = 3$ для системы

$$\begin{cases} \sin a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c = \gamma, \\ \cos a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c = \gamma, \\ \cos a \cos b \sin c - \sin a_1 \sin b \cos c = \gamma, \end{cases} \quad (6)$$

справедливо

Предложение 2. Если $|\gamma| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система (6) совместна.

Выводы. Достаточные условия неотрицательности тригонометрического многочлена могут быть представлены в виде линейных неравенств (2), (3), которые удобны при проверке.

Список литературы. 1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – 615 с. 2. Бабенко К.И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. – Препринт ИПМ АН СССР № 52. – М.: ИПМ АН СССР, 1971. – 70 с. 3. Stein E.M. Harmonic Analysis. – Princeton University Press, New Jersey, 1993. – 605 p. 4. Поля Г., Сега Г. Задачи и теоремы из анализа. – Ч. 2. – М.: ГИТИ, 1956. – 432 с. 5. Белов И.С., Назарова Н.Г. О слабой сходимости итераций метода Ньютона // Вестник ХНУ им. Каразина. – 2006. – Т. 56. – С. 352–359. 6. Belov I.S. Local Extremums of Trigonometric Polynomial // Journal of Mathematical Physics, Analysis. – Geometry. – 2007. – Vol. 3. – № 3. – P. 291–297.

УДК 17.27

Лінійні умови невід'ємності тригонометричного многочлена / І.С. Белов // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2008. – № 49. – С. 11 – 16.

Розглянуто умови невід'ємності тригонометричного многочлена з косинусів

$P(x) = \sum_{m=0}^n \gamma_m \cos mx$ з дійсними коефіцієнтами. Для $n = 2, 3, 4$ подано лінійні умови на коефіцієнти, при яких $P(x) \geq 0, \forall x \in R$. Бібліогр.: 6 назв.

Ключові слова: тригонометричний многочлен, невід'ємність, лінійні умови.

UDC 17.27

Linear conditions nonnegativity of Trigonometric Polynomial / I.S. Belov // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2008. – №. 49. – P. 11 – 16.

Linear conditions of nonnegativity for cosinus trigonometric polynomial $P(x) = \sum_{m=0}^n \gamma_m \cos mx$ with real coefficients are considered. For $n = 2, 3, 4$ linear conditions on coefficients are found, for which $P(x) \geq 0, \forall x \in R$. Refs: 6 titles.

Key words: trigonometric polynomial, nonnegativity, linear conditions.

Поступила в редакцію 11.10.2008