УДК 517.9:629.42

В.Д. ДМИТРИЕНКО, д.т.н., проф. НТУ "ХПИ", Харьков,
А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, к.т.н., ст. преп. НТУ "ХПИ", Харьков,
В.И. НОСКОВ, д.т.н., доц. НТУ "ХПИ", Харьков

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИЗЕЛЬ-ПОЕЗДА С ТЯГОВЫМ АСИНХРОННЫМ ПРИВОДОМ

Рассматривается синтез линейной математической модели дизель-поезда с тяговым асинхронным приводом на основе динамической линеаризации модели объекта управления средствами геометрической теории управления. На основании последовательности инволютивных распределений получена линейная математическая модель в форме Бруновского. Библиогр.: 15 назв.

Ключевые слова: линейная математическая модель, тяговый асинхронный привод, геометрическая теория управления, инволютивные распределения.

Постановка проблемы и анализ литературы. Тяговый подвижной состав железных дорог Украины является одним из основных потребителей электроэнергии и топлива. Поэтому снижение энергозатрат при перевозке пассажиров и грузов является одной из важнейших задач для Украинских железных дорог. Одним из путей уменьшения энергозатрат – это оптимизация управления тяговым подвижным составом. Вопросам оптимизации законов управления подвижным составом за последние десятилетия занимались многие ученые [1-10]. Однако в большинстве этих исследований использовались модели, описываемые системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 2-3 порядка, а для асинхронного тягового привода – пятого порядка. Использование таких упрощенных моделей, с одной стороны, позволило решить ряд задач оптимального управления, но, с другой стороны, слишком упрощенное описание объекта управления не позволяет исследовать целый ряд процессов, влияющих на энергетические затраты тягового подвижного состава. Кроме того, даже при упрощенном описании тягового асинхронного привода системой нелинейных дифференциальных уравнений возникают серьезные трудности при синтезе оптимальных регуляторов с помощью большинства известных методов теории оптимального управления [11, 12]. В связи с этим в работах [10, 13] была предпринята попытка получить удобный математический инструмент для решения задачи управления тяговым приводом с помощью геометрической теории управления. При этом удалось получить законы оптимального управления для объектов, которые описывались системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 5-6 порядка.

Однако при этом модель привода имела только один эквивалентный тяговый двигатель, что существенно ограничило возможности модели для поиска оптимальных законов управления реальным приводом. В связи с этим важно уточнение модели привода, разработка метода динамической линеаризации полученной модели (получение линейной модели в форме Бруновского) и поиск оптимальных законов управления с помощью этой модели.

Целью статьи является синтез линейной математической модели дизель-поезда с тяговым асинхронным приводом на основе динамической линеаризации модели объекта управления средствами геометрической теории управления.

Движение дизель-поезда по перегону может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dS}{dt} = kV\ ; \tag{1}$$

$$\frac{dV}{dt} = M_{T1} + M_{T2} - a_{21}V - a_{22}V^2\ ; \tag{2}$$

$$\frac{d\Psi_{dj}}{dt} = -\alpha_j \Psi_{dj} + \alpha_j L_{mj} i_{dj};\ \ j = 1,2; \tag{3}$$

$$\frac{di_{dj}}{dt} = -\gamma_j\, i_{dj} + p\Omega_j i_{qj} + \alpha_j\, L_{mj}\, \frac{i_{qj}^2}{\Psi_{dj}} + \alpha_j \beta_j\, \Psi_{dj} + \frac{1}{\sigma_j\, L_{sj}} u_{dj};\ \ j = 1,2; \tag{4}$$

$$\frac{di_{qj}}{dt} = -\gamma_j\, i_{qj} - p\Omega_j i_{dj} - \alpha_j\, L_{mj}\, \frac{i_{dj} i_{qj}}{\Psi_{dj}} - p\beta_j\, \Omega_j \Psi_{dj} + \frac{1}{\sigma_j\, L_{sj}} u_{qj};\ \ j = 1,2; \tag{5}$$

$$\frac{d\rho_j}{dt} = p\frac{V}{k_{\Omega j}} + \alpha_j\, L_{mj}\, \frac{i_{qj}}{\Psi_{dj}};\ \ j = 1,2\ , \tag{6}$$

где S – расстояние, отсчитываемое от начала перегона; t – время; k, a_{21}, a_{22} – постоянные коэффициенты; V – скорость движения состава; M_{T1}, M_{T2} – соответственно тяговые моменты привода головного и последнего вагона дизель-поезда (здесь и далее полагаем, что индекс "1" относится к головному вагону дизель-поезда, а индекс "2" – к последнему); $M_{Tj} = k_j \mu_j \Psi_{dj} i_{qj}$, $j = 1,2$; k_1, k_2 – постоянные коэффициенты; $\mu_j = pL_{mj} / J_j L_r$; p – число пар полюсов статора тягового электродвигателя; $L_{m1}, L_{m2}, L_{r1}, L_{r2}$ – соответственно индуктивность контура намагничивания и полная индуктивность ротора эквивалентного тягового двигателя головного и последнего вагона; J_1, J_2 – моменты инерции, приведенные к валам тяговых двигателей; $\Psi_{dj}=\sqrt{\Psi_{urj}^2+\Psi_{vrj}^2}$ $(j=1,2)$ – соответственно потокосцепление ротора эквивалентного тягового двигателя головного и последнего вагона; Ψ_{urj}, Ψ_{vrj} – потокосцепления ротора эквивалентного тягового двигателя по осям u и v; $i_{qj}=i_{vsj}\cos\rho_j-i_{usj}\sin\rho_j$ – ток статора эквивалентного двигателя по оси q, j = 1, 2; i_{vsj}, i_{usj} – статорные токи по осям u и v эквивалентных двигателей; $\rho_j=\arcsin\left(\Psi_{vrj}\Big/\sqrt{\Psi_{urj}^2+\Psi_{vrj}^2}\right)$ или $\rho_j=\arccos\left(\Psi_{urj}\Big/\sqrt{\Psi_{urj}^2+\Psi_{vrj}^2}\right)$; $\alpha_j=1/T_{rj}$; T_{rj} – постоянная времени ротора j-го эквивалентного двигателя; $i_{dj}=i_{usj}\cos\rho_j-i_{vsj}\sin\rho_j$ – ток статора j-го двигателя по оси d в системе координат d, q; $\gamma_j=\dfrac{R_{rj}L_{mj}^2}{\sigma_j L_{sj}L_{rj}^2}+\dfrac{R_{sj}}{\sigma_j L_{sj}}$ $(j=1,2)$; R_{rj},R_{sj} – активные сопротивления соответственно ротора и статора j-го эквивалентного двигателя; σ_j,L_{sj} – соответственно полный коэффициент рассеяния и полная индуктивность статора j-го двигателя; $\Omega_j=V/k_{\Omega j}$ – угловая скорость j-го двигателя; $k_{\Omega j}$ $(j=1,2)$ – постоянные коэффициенты; $\beta_j=\dfrac{L_{mj}}{\sigma_j L_{sj}L_{rj}}$, $j=1,2$; $u_{dj}=u_{usj}\cos\rho_j+u_{vsj}\sin\rho_j$, $j=1,2$; $u_{qj}=u_{vsj}\cos\rho_j+u_{usj}\sin\rho_j$, $j=1,2$.

Введем в правые части уравнений (4), (5) объекта управления новые управления:

$$u_{1j}=p\Omega_j i_{qj}+\alpha_j L_{mj}i_{qj}^2/\Psi_{dj}+\alpha_j\beta_j\Psi_{dj}+u_{dj}/(\sigma_j L_{sj}),\ \ j=1,2; \tag{7}$$

$$u_{2j}=-p\Omega_j i_{dj}-\alpha_j L_{mj}i_{dj}i_{qj}/\Psi_{dj}-p\beta_j\Omega_j\Psi_{dj}+u_{qj}/(\sigma_j L_{sj}),\ \ j=1,2. \tag{8}$$

Обозначив $x_1=S$; $x_2=V$; $x_3=\Psi_{d1}$; $x_4=i_{d1}$; $x_5=i_{q1}$; $x_6=\rho_1$; $x_7=\Psi_{d2}$; $x_8=i_{d2}$; $x_9=i_{q2}$; $x_{10}=\rho_2$; $a_{235}=k_1\mu_1$; $a_{279}=k_2\mu_2$; $a_{33}=-\alpha_1$; $a_{34}=\alpha_1 L_{m1}$; $a_{44}=-\gamma_1=a_{55}$; $a_{62}=p/k_{\Omega 1}$; $a_{635}=\alpha_1 L_{m1}$; $a_{77}=-\alpha_2$; $a_{78}=\alpha_2 L_{m2}$; $a_{88}=-\gamma_2=a_{99}$; $a_{10,2}=p/k_{\Omega 2}$; $a_{10,7,9}=\alpha_2 L_{m2}$

и подставив управления (7), (8) в уравнения (4), (5) получим следующую модель движения дизель-поезда по перегону:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2; && \frac{dx_6}{dt} = a_{62}x_2 + a_{635}\frac{x_5}{x_3};\\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{235}x_3x_5 + a_{279}x_7x_9 - a_{21}x_2 - a_{22}x_2^2; && \frac{dx_7}{dt} = a_{77}x_7 + a_{78}x_8;\\
&\frac{dx_3}{dt} = a_{33}x_3 + a_{34}x_4; && \frac{dx_8}{dt} = a_{88}x_8 + u_{12};\\
&\frac{dx_4}{dt} = a_{44}x_4 + u_{11}; && \frac{dx_9}{dt} = a_{99}x_9 + u_{22};\\
&\frac{dx_5}{dt} = a_{55}x_5 + u_{21}; && \frac{dx_{10}}{dt} = a_{10,2}x_2 + a_{10,7,9}\frac{x_9}{x_7}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для установления возможности преобразования системы нелинейных дифференциальных уравнений (9) к форме Бруновского определим выполнение условий инволютивности распределений M^0, M^1, M^2 для рассматриваемой системы [12]. С этой системой дифференциальных уравнений связаны векторные поля

$$
\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix}
f_1 = x_2\\
f_2 = a_{235}x_3x_5 + a_{279}x_7x_9 - a_{21}x_2 - a_{22}x_2^2\\
f_3 = a_{33}x_3 + a_{34}x_4\\
f_4 = a_{44}x_4\\
f_5 = a_{55}x_5\\
f_6 = a_{62}x_2 + a_{635}\dfrac{x_5}{x_3}\\
f_7 = a_{77}x_7 + a_{78}x_8\\
f_8 = a_{88}x_8\\
f_9 = a_{99}x_9\\
f_{10} = a_{10,2}x_2 + a_{10,7,9}\dfrac{x_9}{x_7}
\end{vmatrix};
\boldsymbol{Y}_1 = \begin{vmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{vmatrix};
\boldsymbol{Y}_2 = \begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{vmatrix};
\boldsymbol{Y}_3 = \begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{vmatrix};
\boldsymbol{Y}_4 = \begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{vmatrix},
$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{10})$.

Векторные поля $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$, $\boldsymbol{Y}_3$, $\boldsymbol{Y}_4$ постоянны, поэтому распределение $M^0 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4\}$ – инволютивно и $\dim \boldsymbol{M}^0 = 4$, где $\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4\}$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1$, …, $\boldsymbol{Y}_4$; $\dim \boldsymbol{M}^0$ – размерность распределения $\boldsymbol{M}^0$.

Рассмотрим распределение $\boldsymbol{M}^1 = \text{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4\}$, где $\boldsymbol{L_X Y}_j$ $(j = \overline{1,4})$ – производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_j$ $(j = \overline{1,4})$:

$$\boldsymbol{L_X Y}_1 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_1 =$$

$$= -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{vmatrix} \cdot \left| 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right|^T =$$

$$= \left| 0, 0, -a_{34}, -a_{44}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right|^T;$$

$$\boldsymbol{L_X Y}_2 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_2] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_2 = \left| 0, -a_{235} x_3, 0, 0, -a_{55}, -\frac{a_{635}}{x_3}, 0, 0, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_X Y}_3 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_3] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_3}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_3 = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, -a_{78}, -a_{88}, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{L_X Y}_4 = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}_4] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}_4}{\partial \boldsymbol{x}} \mathbf{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \mathbf{Y}_4 =$$

$$= \left| 0, -a_{279} x_7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -a_{99}, -\frac{a_{10,7,9}}{x_7} \right|^{\mathrm{T}}.$$

Проверим инволютивность распределения M^1. Для этого необходимо выполнение условия $\text{rank}(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L}_X, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4, [\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j]) = 8$ где $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$ – векторные поля из семейства $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4)$.

Так как

$$[\boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2] = \frac{\partial(\boldsymbol{L_X Y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{L_X Y}_1 - \frac{\partial(\boldsymbol{L_X Y}_1)}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{L_X Y}_2 = \frac{\partial(\boldsymbol{L_X Y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{L_X Y}_1 =$$

$$= \frac{\partial(\boldsymbol{L_X Y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \left| 0, 0, -a_{34}, -a_{44}, 0,0,0,0,0,0 \right|^{\mathrm{T}} = \left| 0, a_{34} a_{235}, 0,0,0, -\frac{a_{34} a_{625}}{x_3^2} 0,0,0,0 \right|^{\mathrm{T}},$$

то матрица $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4,\boldsymbol{L_X Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2,\boldsymbol{L_X Y}_3,\boldsymbol{L_X Y}_4,[\boldsymbol{L_X Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2])$ имеет ранг, равный 9, т.е. условие инволютивности распределения M^1 не выполняется. При этом $\det(\boldsymbol{B})=2\cdot a_{34}^2\cdot a_{235}/x^3\cdot a_{675}\cdot a_{78}\cdot a_{10,7,9}/x_7$.

Проверим инволютивность распределений $\boldsymbol{M}_k^1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4,\boldsymbol{L_X Y}_k\},\ \ k=\overline{1,4}$. Очевидно, что

$$[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2]=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_3]=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_4]=[\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3]=[\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_4]=[\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4]=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_1]=$$
$$=[\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{L_X Y}_1]=[\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{L_X Y}_1]=[\boldsymbol{Y}_4,\boldsymbol{L_X Y}_1]=\left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}},$$

поэтому распределение $\boldsymbol{M}_1^1$ инволютивно. Имеем также

$$[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2]=\frac{\partial(\boldsymbol{L_X Y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1-\frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{L_X Y}_2=\left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$[\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{L_X Y}_2]=\frac{\partial(\boldsymbol{L_X Y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2-\frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{L_X Y}_2=$$
$$=[\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{L_X Y}_2]=[\boldsymbol{Y}_4,\boldsymbol{L_X Y}_2]=\left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$
$$[\boldsymbol{Y}_k,\boldsymbol{L_X Y}_3]=[\boldsymbol{Y}_k,\boldsymbol{L_X Y}_4]==\left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}},\ k=\overline{1,4}.$$

Все подраспределения $\boldsymbol{M}_k^1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4,\boldsymbol{L_X Y}_k\}$, $k=\overline{1,4}$, являются инволютивными, поэтому дополнительную переменную (или интегратор) можно вводить в любой канал управления. Однако введение одного, двух или трех интеграторов не позволяет решить проблему получения инволютивного распределения $\boldsymbol{M}^1$ для расширенной системы. Распределение $\boldsymbol{M}^1$ становится инволютивным при введении по два интегратора в каналы управления, связанные со вторым и четвертым управлениями.

Введем следующие обозначения

$$u_{11}=u_1,\ u_{21}=y_7;\ x_i=y_i,\ i=\overline{1,6};$$
$$\frac{dy_7}{dt}=y_8,\ \frac{dy_8}{dt}=u_2;\ u_{12}=u_3;\ x_{k+2}=y_k,\ k=\overline{9,12};\ u_{22}=y_{13};\ \frac{dy_{13}}{dt}=y_{14};$$
$$\frac{dy_{14}}{dt}=u_4.$$

В новых обозначениях расширенная модель объекта управления имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}=y_2; && \frac{dy_8}{dt}=u_2;\\
&\frac{dy_2}{dt}=a_{235}y_3y_5+a_{279}y_9y_{11}-a_{21}y_2-a_{22}y_2^2; && \frac{dy_9}{dt}=a_{77}y_9+a_{78}y_{10};\\
&\frac{dy_3}{dt}=a_{33}y_3+a_{34}y_4; && \frac{dy_{10}}{dt}=a_{88}y_{10}+u_3;\\
&\frac{dy_4}{dt}=a_{44}y_4+u_1; && \frac{dy_{11}}{dt}=a_{99}y_{11}+y_{13};\\
&\frac{dy_5}{dt}=a_{55}y_5+y_7; && \frac{dy_{12}}{dt}=a_{10,2}y_2+a_{10,7,9}\frac{y_{11}}{y_9};\\
&\frac{dy_6}{dt}=a_{62}y_2+a_{635}\frac{y_5}{y_3}; && \frac{dy_{13}}{dt}=y_{14};\\
&\frac{dy_7}{dt}=y_8; && \frac{dy_{14}}{dt}=u_4.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

С расширенной моделью объекта управления связаны векторные поля:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y})=\left|g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_1^*=\left|0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_2^*=\left|0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_3^*=\left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_4^*=\left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1\right|^{\mathrm{T}},$$

где $g_1=y_2$; $g_2=a_{235}y_3y_5+a_{279}y_9y_{11}-a_{21}y_2-a_{22}y_2^2$; $g_3=a_{33}y_3+a_{34}y_4$; $g_4=a_{44}y_4$; $g_5=a_{55}y_5+y_7$; $g_6=a_{62}y_2+a_{635}\cdot y_5/y_3$; $g_7=y_8$; $g_8=0$; $g_9=a_{77}y_9+a_{78}y_{10}$; $g_{10}=a_{88}y_{10}$; $g_{11}=a_{99}y_{11}+y_{13}$; $g_{12}=a_{10,2}y_2+$ $+a_{10,7,9}\cdot y_{11}/y_9$; $g_{13}=y_{14}$; $g_{14}=0$.

Для расширенной модели объекта управления распределение $\boldsymbol{M}^{0*}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*,\boldsymbol{Y}_2^*,\boldsymbol{Y}_3^*,\boldsymbol{Y}_4^*\}$ инволютивно и $m_0=\dim\boldsymbol{M}^{0*}=4$. Проверим инволютивность распределения $\boldsymbol{M}^{1*}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*,\boldsymbol{Y}_2^*,\boldsymbol{Y}_3^*,\boldsymbol{Y}_4^*,\boldsymbol{L_Y Y}_1^*,\boldsymbol{L_Y Y}_2^*,\boldsymbol{L_Y Y}_3^*,$ $\boldsymbol{L_Y Y}_4^*\}$. Поскольку имеем

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*}\boldsymbol{Y}_1^*=-\frac{\partial\boldsymbol{Y}}{\partial\boldsymbol{y}}\boldsymbol{Y}_1^*=-\left|0,0,\ \mathrm{a}_{34},\mathrm{a}_{44},0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_{Y^*}Y_2^* = -\frac{\partial Y}{\partial y}Y_2^* = -\left|0, 0,\ 0, 0, 0, 0, 1,\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_{Y^*}Y_3^* = -\frac{\partial Y}{\partial y}Y_3^* = -\left|0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\ \mathrm{a}_{78}, \mathrm{a}_{88}, 0, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_{Y^*}Y_4^* = -\frac{\partial Y}{\partial y}Y_4^* = -\left|0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\right|^{\mathrm{T}},$$

т.е. все вектора распределения M^{1*} имеют постоянные компоненты, то распределение $\boldsymbol{M}^{1*}$ инволютивно $m_1 = \dim \boldsymbol{M}^{1*} = 8.$

Проверим инволютивность распределения $\boldsymbol{M}^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{M}^{1*}, [\boldsymbol{Y}^*,$ $\boldsymbol{M}^{1*}]\}$ $= \mathrm{span}\{Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*, L_Y Y_1^*, L_Y Y_2^*, L_Y Y_3^*, L_Y Y_4^*, L_Y^2 Y_1^*, L_Y^2 Y_2^*,\ L_Y^2 Y_3^*,$ $L_Y^2 Y_4^*\}$ **.** Имеем

$$L_Y^2 Y_1^* = [Y, L_Y Y_1^*] = -\frac{\partial Y}{\partial y} L_Y Y_1^* =$$

$$= \left|0, a_{34}a_{235}y_5, a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44}, a_{44}^2, 0, \frac{a_{34}a_{635}y_5}{y_3^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_Y^2 Y_2^* = -\frac{\partial Y}{\partial y} L_Y Y_2^* = \left|0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};\ \ L_Y^2 Y_3^* = -\frac{\partial Y}{\partial y} L_Y Y_3^* =$$

$$= \left|0, a_{78}a_{279}y_{11}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a_{77}a_{78} + a_{78}a_{88}, a_{88}, 0, -\frac{a_{78}a_{10,7,9}y_{11}}{y_9^2}, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_Y^2 Y_4^* = -\frac{\partial Y}{\partial y} L_Y Y_4^* = \left|0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$[L_Y^2 Y_1^*,\ L_Y^2 Y_3^*] = \frac{\partial(L_Y^2 Y_3^*)}{\partial y} L_Y^2 Y_1^* - \frac{\partial(L_Y^2 Y_1^*)}{\partial y} L_Y^2 Y_3^* =$$

$$= \left|0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}}.$$

Проверяем другие пары:

$$[L_Y^2 Y_1^*,\ L_Y^2 Y_2^*] = \frac{\partial(L_Y^2 Y_2^*)}{\partial y} L_Y^2 Y_1^* - \frac{\partial(L_Y^2 Y_1^*)}{\partial y} L_Y^2 Y_2^* =$$

$$= -\left|0, a_{34}a_{235}, 0, 0, 0,\ -\frac{a_{34}a_{635}}{y_3^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_1^*,\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*] = \left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*,\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*] = \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*)}{\partial\boldsymbol{y}}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^* - \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*)}{\partial\boldsymbol{y}}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^* =$$

$$= -\left|0, a_{78}a_{279}, 0,0,0,0,0,0,0,0,0, -\frac{a_{78}a_{10,7,9}}{y_9^2},\ 0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*,\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^*] = \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^*)}{\partial\boldsymbol{y}}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^* - \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*)}{\partial\boldsymbol{y}}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^* =$$

$$= \left|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}}$$

Поскольку ранг матрицы $\boldsymbol{R}_2 = (\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_4^*,$ $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*, [\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*])$ не равен 12, то распределение $\boldsymbol{M}^{2*}$ не является инволютивным.

Динамическая линеаризация при наличии нескольких управлений возможна при наличии инволютивности более простых подраспределений:

$$\boldsymbol{M}_1^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_1^*\},$$
$$\boldsymbol{M}_2^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^*\},$$
$$\boldsymbol{M}_3^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_3^*\},$$
$$\boldsymbol{M}_4^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*\}.$$

Подраспределения M_2^{2*} и M_4^{2*} являются инволютивными, поскольку все их вектора имеют постоянные компоненты.

Исследования распределений:

$$\boldsymbol{M}_2^{3*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{M}_2^{2*}, [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{M}_2^{2*}]\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^3\boldsymbol{Y}_2^*\};$$
$$\boldsymbol{M}_4^{3*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{M}_4^{2*}, [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{M}_4^{2*}]\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^3\boldsymbol{Y}_4^*\},$$

показывает, что они также являются инволютивными.

На основании теории о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с m управлениями [14, 15] получим, что каноническая форма Бруновского имеет четыре клетки, и индекс управляемости $k_{\max}$ для данного объекта равен четырем. Поскольку число рассматриваемых инволютивных распределений M_j, $j = \overline{0, k_{\max} - 1}$, то условия для получения линейного эквивалента для рассматриваемого объекта выполнены.

В результате получим математическую модель в форме Бруновского:

$$\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1},\ i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13;$$
$$\frac{dz_4}{dt} = v_1; \frac{dz_8}{dt} = v_2; \frac{dz_{10}}{dt} = v_3; \frac{dz_{14}}{dt} = v_4, \tag{11}$$

где $v_k\ (k = \overline{1, 4})$ – управления.

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет четыре клетки, то необходимо определить четыре функции $T_j(y)$ ($j = \overline{1, 4}$) – преобразования от расширенной модели объекта управления к модели в форме Бруновского. Известно, что такие функции существуют и методика получения их известна [13 – 15]. Математическое моделирование объекта управления в форме Бруновского показало его работоспособность.

Выводы. Таким образом, впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная линейная математическая модель дизель-поезда, с тяговым асинхронным приводом, эквивалентная нелинейной математической модели, описываемой системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений десятого порядка. Полученная линейная модель в канонической форме Бруновского может быть использована для синтеза оптимальных законов управления тяговым подвижным составом.

Список литературы: **1.** *Ковальский А.Н.* Синтез автоматического управления поездом метрополитена (САУ-М) и ее модернизация / *А.Н. Ковальский* // Труды МИИЖТ. – Вып. 276. – М.: МИИЖТ, 1968. – С. 3 – 13. **2.** *Петров Ю.П.* Оптимальное управление движением транспортных средств / *Ю.П. Петров.* – Л.: Энергия, 1969. – 96 с. **3.** *Шинская Ю.В.* Расчет оптимальных режимов ведения поездов метрополитена методом динамического прогнозирования / *Ю.В. Шинская* // Труды ЛИИЖТ. – Вып. 315. – Л.: ЛИИЖТ, 1970. – С. 18 – 23. **4.** *Легостаев Е.Н.* Автоматизация управления движением поездов на метрополитенах / *Е.Н. Легостаев, И.П. Исаев, А.Н. Ковальский.* – М.: Транспорт, 1976. – 96 с. **5.** *Кудрявцев Я.Б.* Принцип максимума и оптимальное управление движением поезда / *Я.Б. Кудрявцев* // Вісник ВНИИЖТ. – 1977. – № 1. – С. 57 – 61. **6.** *Костромин А.М.* Оптимизация управления локомотивом. / *А.М. Костромин.* – М.: Транспорт, 1979. – 119 с. **7.** *Носков В.И.* Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / *В.И. Носков, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Заполовский, С.Ю. Леонов.* – Харьков: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. **8.** *Дмитриенко В.Д.* Математическое моделирование и оптимизация системы управления тяговым электроприводом / *В.Д. Дмитриенко, В.И. Носков, М.В. Липчанский* // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС. – 2004. – Вип. 11 (39). – С. 55–62. **9.** *Дмитриенко В.Д.* Определение оптимальных режимов ведения дизель-поезда с использованием нейронных сетей АРТ / *В.Д. Дмитриенко, В.И. Носков, М.В. Липчанский, А.Ю. Заковоротный* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2004. – № 46. – С. 90 – 96. **10.** *Дмитриенко В.Д.* Синтез оптимальных законов управления тяговым электроприводом методами дифференциальной геометрии и принципа максимума // *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС. – 2009. – Вип. 4 (78). – С. 42–51. **11.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти томах. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. *К.А. Пупкова и И.Д. Егунова*. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. **12.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. *К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с. **13.** *Дмитриенко В.Д.* Синтез оптимальных законов управления движением дизель-поезда с помощью математической модели в форме Бруновского / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Н.В. Мезенцев* // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – Харків: УкрДАЗТ. – 2010. – Вип. 5-6. – С. 7–13. **14.** *Краснощёченко В.И.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Грищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с. **15.** *Qiang Lu.* Nonlinear control systems and power system dynamics. / *Lu Qiang, Sun Yuangzhang, Mei Shengwei*. – 2001. – 376 c.

УДК 517.9:629.42

Лінеаризація математичної моделі дизель-поїзда з тяговим асинхронним приводом / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Носков В.І. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2011. – № 17. – С. 26 – 36.

Розглядається синтез лінійної математичної моделі дизель-поїзда з тяговим асинхронним приводом на основі динамічної лінеаризації моделі об’єкта керування засобами геометричної теорії керування. На підставі послідовності інволютивних розподілів отримана лінійна математична модель у формі Бруновського. Бібліогр.: 15 назв.

Ключові слова: лінійна математична модель, тяговий асинхронний привод, геометрична теорія керування, інволютивні розподіли.

UDC 517.9:629.42

Linearization mathematical model diesel train with asynchronous traction drive / Dmitrienko V.D., Zakovorotnyi A.Y., Noskov V.I. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2011. – №. 17. – P. 26 – 36.

A synthesis of linear mathematical model diesel train with asynchronous traction drive based on dynamic object model linearization control of the means of geometric control theory. Based on the sequence of involutive transformations received linear mathematical model in the form of Brunovski. Refs.: 15 titles.

Keywords: linear mathematical model, asynchronous traction drive, geometric control theory, involutive transformations.

Поступила в редакцию 01.03.2011