**УДК 681.5.03**

***Р.С. ВОЛЯНСКИЙ,*** канд. техн. наук, доц., докторант, Днепродзержинский государственный технический университет, Днепродзержинск,
***А.В. САДОВОЙ,*** д-р техн. наук, проф., проректор по научной работе, Днепродзержинский государственный технический университет, Днепродзержинск,
***Н.В. СЛИПЧЕНКО,*** ст.преп., Днепродзержинский государственный технический университет, Днепродзержинск

# ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПИ-РЕГУЛЯТОРОМ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

Составлено матричное уравнение движения обобщенной замкнутой динамической системы (ОЗДС) с интегродифференциалом комплексного порядка. Найдена частотная интерпретация интегродифференциала комплексного порядка. Составлена матричная частотная передаточная функция (МЧПФ) исследуемой ОЗДС. Рассмотрен пример определения МЧПФ для электропривода постоянного тока. Ил.: 1. Библиограф.: 8 назв.

**Ключевые слова:** динамическая система, интегродифференциал комплексного порядка, матричная частотная передаточная функция, электропривод.

**Постановка проблемы.** Последние достижения микропроцессорной и микроконтроллерной техники в разработке недорогих мощных микроконтроллеров создали предпосылки для усовершенствования существующих и разработки новых систем управления электромеханическими объектами и технологическими процессами. Оптимизация таких систем по различным критериям позволяет улучшить характеристики систем управления и, как следствие, повысить качество выпускаемой продукции при одновременном снижении ее себестоимости. Одним из направлений оптимизации является использование интегродифференциалов дробной размерности координат объекта управления [1, 2].

**Анализ литературы.** Системам управления, регуляторы которых работают на дробномерных линиях равновесия, посвящено большое количество работ как отечественных [3 – 5], так и зарубежных авторов [6]. Приведенные в них результаты показывают, что использование в составе алгоритма управления производных и интегралов дробной размерности позволяет улучшить качество процессов управления, создавая предпосылки для обобщения операций интегродифференцирования на случай комплексной размерности [7]. Последнее обуславливает возникновение актуальной научной задачи, посвященной исследованию свойств замкнутых динамических систем с интегродифференциалами комплексного порядка. Одним из подходов к решению этой задачи является анализ динамических систем в частотной области, базирующийся на определении и исследовании частотной передаточной функции (ЧПФ) [8].

**Цель статьи** – разработка метода определения ЧПФ замкнутой динамической системы с интегродифференциалом комплексного порядка и исследование ее частотных характеристик.

**1. Теоретические основы метода.** Рассмотрим обобщенную электромеханическую систему, уравнения движения которой в относительных единицах можно представить следующим образом

$$p\mathbf{Y} = \mathbf{AY} + \mathbf{M}U, \tag{1}$$

где $p$ – оператор Лапласа; $\mathbf{Y}$ – вектор переменных состояния; $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов, определяющих свободное движение объекта управления; $\mathbf{M}$ – вектор коэффициентов, которые определяют управляемое движение объекта; $U$ – управляющее воздействие.

Будем считать, что движение динамического объекта (1) происходит под действием управляющего воздействия

$$U = \left(\mathbf{K_p} + p^{-\alpha - j\beta}\mathbf{K}_i\right) \times \left(\mathbf{Y}^* - \mathbf{Y}\right), \tag{2}$$

где $\mathbf{K_p}$, $\mathbf{K}_i$ – матрицы-строки коэффициентов усиления пропорциональной и интегральной частей регулятора; $\mathbf{Y}^*$, $\mathbf{Y}$ – матрицы-столбцы желаемых и текущих значений переменных состояний.

Регулятор, реализующий алгоритм (2), является обобщением ПИ$^{\alpha}$-регулятора с дробномерным интегратором [6]. Такой регулятор будем называть ПИ$^{c}$-регулятором комплексного порядка.

Подставив управляющее воздействие (2) в уравнение движения объекта (1), представим его следующим образом

$$[p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{M}(\mathbf{K_p} + p^{-\alpha - j\beta}\mathbf{K}_i)]\mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathbf{K_p} + p^{-\alpha - j\beta}\mathbf{K}_i)\mathbf{Y}^*. \tag{3}$$

Заменив в уравнении (3) оператор Лапласа $p$ на оператор Фурье $j\omega$, получим следующее выражение для амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) динамической системы (3)

$$[j\omega\mathbf{E}-\mathbf{A}+\mathbf{M}(\mathbf{K_p}+j\omega^{-\alpha-j\beta}\mathbf{K}_i)]\mathbf{Y}=\mathbf{M}(\mathbf{K_p}+(j\omega)^{-\alpha-j\beta}\mathbf{K}_i)\mathbf{Y}^*. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) может быть получена матричная частотная передаточная функция системы (3)

$$\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}^*}=[j\omega\mathbf{E}-\mathbf{A}+\mathbf{M}(\mathbf{K_p}+j\omega^{-\alpha-j\beta}\mathbf{K}_i)]^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{K_p}+(j\omega)^{-\alpha-j\beta}\mathbf{K}_i). \qquad (5)$$

Выражения (4) и (5) содержат комплексный оператор $(j\omega)^{-\alpha-j\beta}$, главное значение которого может быть определено через элементарные функции следующим образом

$$\begin{aligned}(j\omega)^{-\alpha-j\beta} &= f_{\mathrm{Re}}(\omega)+jf_{\mathrm{Im}}(\omega)=\\ &=\frac{e^{\beta\pi/2}\cos(\beta\ln\omega+\alpha\pi/2)}{\omega^{\alpha}}+j\frac{e^{\beta\pi/2}\sin(\beta\ln\omega+\alpha\pi/2)}{\omega^{\alpha}}.\end{aligned} \qquad (6)$$

Подстановка выражения (6) в зависимость (5) позволяет записать МЧПФ следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{Y}^*(j\omega)} &= \left[j\omega\mathbf{E}-\mathbf{A}+\mathbf{M}\left(\mathbf{K_p}+f_{\mathrm{Re}}(\omega)\mathbf{K_i}+jf_{\mathrm{Im}}(\omega)\mathbf{K_i}\right)\right]^{-1}\times\\ &\times\mathbf{M}\left(\mathbf{K_p}+f_{\mathrm{Re}}(\omega)\mathbf{K_i}+jf_{\mathrm{Im}}(\omega)\mathbf{K_i}\right)\end{aligned} \qquad (7)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{Y}^*(j\omega)} &= \frac{adj\left[-\mathbf{A}+\mathbf{M}\left(\mathbf{K_p}+f_{\mathrm{Re}}(\omega)\mathbf{K_i}\right)+j\left(\omega\mathbf{E}+f_{\mathrm{Im}}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{K_i}\right)\right]}{\det\left(\left[-\mathbf{A}+\mathbf{M}\left(\mathbf{K_p}+f_{\mathrm{Re}}(\omega)\mathbf{K_i}\right)+j\left(\omega\mathbf{E}+f_{\mathrm{Im}}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{K_i}\right)\right]\right)}\mathbf{M}\times\\ &\times\left[\mathbf{K_p}+\left(f_{\mathrm{Re}}(\omega)+jf_{\mathrm{Im}}(\omega)\right)\mathbf{K_i}\right],\end{aligned} \qquad (8)$$

где $adj[.]$ – функция, возвращающая матрицу алгебраических дополнений аргумента.

Выражение (8) является МЧПФ системы с ПИ$^c$-регулятором комплексного порядка и позволяет определять частотные характеристики широкого класса замкнутых систем не только с П, ПИ, ПИ$^\alpha$, ПИ$^c$ – регуляторами, но и, принимая во внимание, что тип операции интегродифференцирования определяется знаком степени оператора дифференцирования, систем с ПД-, ПД$^\alpha$-, ПД$^c$-регуляторами. В случае исследования систем с ПИ$^{c1}$Д$^{c2}$-регуляторами или более сложными, выражение (8) дополняется соответствующими составляющими, не ограничивая при этом область применения разработанного метода.

**2. Пример использования метода.** В качестве примера определим частотную передаточную функцию для контура регулирования скорости электропривода постоянного тока с ПИ$^{c}$-регулятором, движение которого описывается следующими уравнениями динамики:

$$\begin{gathered} py_1 = a_{12} y_2; \\ py_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + m_2 U; \\ U = \left( k_1 + \frac{k_2}{p^{\alpha + j\beta}} \right) \left( y_1^* - y_1 \right). \end{gathered} \tag{9}$$

Составим для системы (9) матрицы, входящие в выражение (8)

$$\begin{gathered} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{K_p} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{K_i} = \begin{pmatrix} k_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{10}$$

Подставив матрицы (10) в выражение (8), получим МЧПФ системы (9)

$$\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}^*} = \frac{adj[W]}{\det(W)} \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} k_1 & 0 \end{pmatrix} + f_{\mathrm{Re}}(\omega) + j f_{\mathrm{Im}}(\omega) \begin{pmatrix} k_2 & 0 \end{pmatrix} \right], \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} W = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} k_1 & 0 \end{pmatrix} + f_{\mathrm{Re}}(\omega) \begin{pmatrix} k_2 & 0 \end{pmatrix} \right] + \\ + j \left[ \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f_{\mathrm{Im}}(\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{gathered} \tag{12}$$

После выполнения алгебраических преобразований МЧПФ (11) примет вид

$$\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}^*}=\begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}m_2\left(k_1\omega^{\alpha}+k_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\pi}\left[\cos\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)+j\sin\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right]\right)}{-\omega^{2+\alpha}-ja_{22}\omega^{1+\alpha}+\omega^{\alpha}\left(k_1a_{12}m_2-a_{12}a_{21}\right)+D} & 0 \\ \dfrac{jm_2\omega\left(k_1\omega^{\alpha}+k_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\pi}\left[\cos\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\sin\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right]\right)}{-\omega^{2+\alpha}-ja_{22}\omega^{1+\alpha}+\omega^{\alpha}\left(k_1a_{12}m_2-a_{12}a_{21}\right)+D} & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $D = k_2a_{12}m_2e^{\frac{\beta\pi}{2}}\left[\cos\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\sin\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right]$.

Размерность МЧПФ (13) задается числом независимых координат состояния, при этом количество ненулевых столбцов определяется числом задающих воздействий, подаваемых на систему. Выделив из МЧПФ (13) первый элемент первого столбца, получим искомую частотную передаточную функцию

$$\Phi(j\omega)=\frac{a_{12}m_2\left(k_1\omega^{\alpha}+k_2\mathrm{e}^{\frac{\beta\pi}{2}}\left[\cos\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)+j\sin\left(\beta\ln(\omega)+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right]\right)}{-\omega^{2+\alpha}-ja_{22}\omega^{1+\alpha}+\omega^{\alpha}\left(k_1a_{12}m_2-a_{12}a_{21}\right)+D}. \quad (14)$$

Приняв $\alpha=1$, $\beta=0$ и воспользовавшись зависимостью (14), определим ЧПФ замкнутой системы с классическим ПИ-регулятором

$$\Phi(j\omega)=\frac{a_{12}m_2\left(k_1\omega+jk_2\right)}{-\omega^3-ja_{22}\omega^2+\omega\left(k_1a_{12}m_2-a_{12}a_{21}\right)+jk_2a_{12}m_2}. \quad (15)$$

Умножение числителя и знаменателя ЧПФ (15) на $j$ приводит к выражению, которое может быть получено классическим методом. Считая параметры исследуемой системы единичными, построим на основании ЧПФ (14) и (15) соответствующие АФХ (рис.).

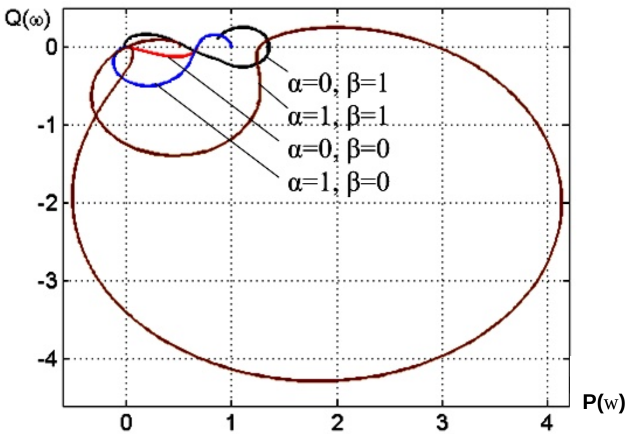


Рис. АФХ исследуемой системы при различных параметрах интегродифференциала комплексного порядка.

Анализ полученных АФХ при $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = 1$, $\beta = 0$, описываемых выражением (14) и найденные классическим способом совпадают. Приведенные на рис. АФХ позволяют сделать вывод, что при частоте $\omega$ равной нулю единичным коэффициентом усиления обладает только система с классическим ПИ-регулятором. Указанный недостаток систем с интегродифференциалом комплексного порядка может быть устранен путем увеличения порядка интегродифференциала.

**Выводы.** Использование при анализе частотных свойств систем матричного исчисления совместно с теорией функции комплексного переменного позволяет получить простые выражения для МЧПФ динамических систем с интегродифференциалом комплексного порядка.

Анализ зависимостей (13) и (14) показывает, что ЧПФ замкнутой системы с интегродифференциалом комплексного порядка независимой переменной, по которой находится передаточная функция, содержит гармонические составляющие, определяющиеся порядком интегродифференциала и частотой входного воздействия. Принимая во внимание, что интегродифференциал комплексного порядка является обобщением операций дифференцирования и интегрирования, можно сделать вывод, что ЧПФ с гармоническими составляющими являются обобщением известных ЧПФ динамических систем.

Анализ полученных АФХ показывает, что наличие в ЧПФ гармонических составляющих в определенном частотном диапазоне позволяет повысить коэффициент усиления системы, обеспечивая тем самым форсировку замкнутой системы в динамических режимах.

**Список литературы: 1.** *Васильев В.В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / *В.В. Васильев, Л.А. Симак*. – К.: НАН Украины, 2008. – 256 с. **2.** *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение / *А.М. Нахушев*. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с. **3.** *Бушер В.В.* Динамические свойства систем управления с дробным порядком астатизма / *В.В. Бушер* // Электротехнические и компьютерные системы. – 2010. – № 1. – С.13-16. **4.** *Васильев А.В.* Математические модели ПИД-контроллеров динамических систем целого и дробного порядков на основе *S*-преобразования / *А.В. Васильев* // Информационные и телекоммуникационные технологии. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 21-26. **5.** *Учайкин В.В.* Метод дробных производных / *В.В. Учайкин*. – Ульяновск: "Артишок", 2008. – 512 с. **6.** *Podlubny I.* Fractional differential equation / *I. Podlubny*. – San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p. **7.** *Самко С.Г.* Интегралы и дифференциалы дробного порядка и некоторые их приложения / *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев*. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с. **8.** *Авсиевич А.В.* Частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста для моделей систем автоматического управления с дробным порядком / *А.В. Авсиевич, В.В. Авсиевич* // Вестник транспорта Поволжья. – 2010. – № 1. – С. 35-41.

*Поступила в редакцию 07.06.2013*

УДК 681.5.03

**Частотні характеристики замкнутої електромеханічної системи з ПІ-регулятором комплексного порядку / Волянський Р.С., Садовой О.В., Сліпченко Н.В. //** Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2013. – № 19 (992). – С. 3 – 9.

Складено матричне рівняння руху узагальненої замкнутої динамічної системи (ОЗДС) з інтегродифференціалом комплексного порядку. Знайдена частотна інтерпретація інтегродифференціала комплексного порядку. Складена матрична частотна передатна функція (МЧПФ) досліджуваної ОЗДС. Розглянуто приклад визначення МЧПФ для електроприводу постійного струму. Іл.: 1. Бібліограф.: 8 назв.

**Ключові слова:** динамічна система, інтегродифференціал комплексного порядку, матрична частотна передатна функція, електропривод.

UDC УДК 681.5.03

**Frequency response of closed-loop electromechanical system with PI controller of complex order / Volyanskiy R.S., Sadovoy A.V., Slipchenko N.V.** // Herald of National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modeling. – Kharkov: NTU "KPI". – 2013. – № 19 (992). – P. 3 – 9.

Matrix equation of generalized closed-loop complex order dynamic system (GCDS) motion is given. Frequency interpretation of complex order integrator is found. Frequency transfer function matrix (MCHPF) investigated GCDS is shown. MCHPF for DC electric drive is determined. Figs. 1. Ref: 8 titles.

**Keywords:** dynamic system, integrator of complex order, matrix frequency transfer function, electric drive.