УДК 681.5

В.Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ",
А.О. НЕСТЕРЕНКО, асп., НТУ "ХПИ"

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ В ФОРМЕ БРУНОВСКОГО

Для пакета Matlab разработана программа, автоматизирующая преобразование нелинейных систем к эквивалентному линейному виду с помощью средств геометрической теории управления. Выполнен синтез линейной математической модели движения дизель-поезда в канонической форме Бруновского. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: форма Бруновского, преобразование нелинейных систем, геометрическая теория управления, математическая модель движения дизель-поезда.

Постановка проблемы и анализ литературы. Вопросами оптимизации функционирования железнодорожного транспорта на протяжении многих лет занималось множество ученых [1 – 8]. При этом большинство исследований выполнялось с помощью математического моделирования на сложных моделях, описываемых системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка. Это, в свою очередь, приводит к серьезным трудностям при поиске оптимальных управлений тяговым подвижным составом, так как большинство из известных методов применимы лишь для объектов, которые описываются системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений не выше 2-3 порядка [9, 10]. В связи с этим в работах [8, 11, 12] была решена задача поиска оптимальных управлений с помощью динамической линеаризации исходной нелинейной модели, методами геометрической теории управления [13], при этом были получены законы оптимального управления для объектов, которые описывались системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 5-6 порядка. Однако для поиска оптимальных законов управления реальным приводом, который учитывает параллельную работу нескольких электродвигателей, необходима разработка специализированных программных средств, которые могли бы автоматизировать процесс преобразования нелинейных систем к линейному виду.

Целью статьи является разработка программных средств, автоматизирующих в пакете Matlab преобразование нелинейной математической модели движения дизель-поезда к эквивалентному линейному виду в форме Бруновского с помощью инволютивных распределений геометрической теории управления.

Подход, основанный на геометрической теории управления, динамической линеаризации обратной связью в пространстве "вход – состояние" нелинейной математической модели движения дизель-поезда, с помощью последовательности инволютивных распределений, может быть представлен в виде алгоритма:

Шаг. 1. Задание исходной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шаг. 2. Построение векторных полей, связанных с нелинейной системой дифференциальных уравнений.

Шаг. 3. Проверка последовательности распределений на выполнение условий инволютивности. В случае выполнения условий инволютивности последовательности распределений – переход к шагу 5 алгоритма.

Шаг. 4. В случае невыполнения условий инволютивности последовательности распределений – увеличение размерности пространства, путем введения дополнительных фазовых координат в каналы, связанные с управлениями. Переход к шагу 2 алгоритма.

Шаг. 5. Определение индекса управляемости для рассматриваемой системы управления, используя теорему о линейном эквиваленте для нелинейной аффинной системы с векторным управлением.

Шаг. 6. По индексу управляемости системы, определяется форма линейного эквивалента, т.е. определяется количество клеток канонической формы Бруновского.

Шаг. 7. Построение системы дифференциальных уравнений, из которой путем последовательного дифференцирования, вдоль соответствующих векторных полей, определяются функции перехода к канонической форме Бруновского.

Шаг. 8. Нахождение функций перехода к канонической форме Бруновского.

Шаг. 9. Определение управляющих воздействий для линейной системы уравнений в канонической форме Бруновского.

Шаг. 10. Переход от управлений линейной системой в форме Бруновского к управлениям для исходной нелинейной системы уравнений.

Шаг. 11. Останов.

Этот алгоритм программно реализован в пакете Matlab.

Рассмотрим применение разработанного программного продукта для линеаризации математической модели движения дизель-поезда.

Математическая модель движения дизель-поезда, учитывающая работу двух тяговых приводов, может быть описана следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = a_{12}x_2 = f_1; \\
\frac{dx_2}{dt} = a_{235}x_3x_5 - a_{246}x_4x_6 + a_{289}x_8x_9 - a_{2,7,10}x_7x_{10} - a_{200} - \\
- a_{220}x_2 - a_{222}x_2^2 = f_2; \\
\frac{dx_3}{dt} = a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + U_1^1 = f_3 + U_1^1; \\
\frac{dx_4}{dt} = a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{425}x_2x_5 = f_4; \\
\frac{dx_5}{dt} = a_{55}x_5 + a_{56}x_6 + a_{524}x_2x_4 = f_5; \\
\frac{dx_6}{dt} = a_{65}x_5 + a_{66}x_6 + U_2^1 = f_6 + U_2^1; \\
\frac{dx_7}{dt} = a_{77}x_7 + a_{78}x_8 + a_{729}x_2x_9 = f_7; \\
\frac{dx_8}{dt} = a_{87}x_7 + a_{88}x_8 + U_1^2 = f_8 + U_1^2; \\
\frac{dx_9}{dt} = a_{99}x_9 + a_{9,10}x_{10} + a_{9,2,7}x_2x_7 = f_9; \\
\frac{dx_{10}}{dt} = a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} + U_2^2 = f_{10} + U_2^2,
\end{gathered} \tag{1}$$

где x_1 – расстояние, отсчитываемое от начала перегона; t – время; $a_{12}, a_{235}, a_{246}, ..., a_{10,9}, a_{10,10}$ – постоянные коэффициенты определяемые параметрами привода; x_2 – скорость движения состава; x_3, x_4 и x_7, x_8 – потокосцепления по оси u соответственно первого и второго двигателей; x_5, x_6 и x_9, x_{10} – потокосцепления по оси v соответственно первого и второго двигателей; U_1^q, U_2^q $(q = 1, 2)$ – питающие напряжения первого и второго тяговых двигателей.

С системой дифференциальных уравнений (1) связаны векторные поля $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \left| f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6,\ f_7,\ f_8,\ f_9,\ f_{10} \right|^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}_1 = \left|0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}_2 = \left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}_3 = \left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}_4 = \left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\right|^{\mathrm{T}}$, которые в пакете Matlab могут быть заданы следующим образом:

```
f1 = sym('a12 * x2');
f2 = sym('a235 * x3 * x5 - a246 * x4 * x6 + a289 * x8 * x9 - a2710 * x7
* x10 - a200 - a220 * x2 - a222 * x2^2');
f3 = sym('a33 * x3 + a34 * x4');
f4 = sym('a43 * x3 + a44 * x4 + a425 * x2 * x5');
f5 = sym('a55 * x5 + a56 * x6 + a524 * x2 * x4');
f6 = sym('a65 * x5 + a66 * x6');
f7 = sym('a77 * x7 + a78 * x8 + a729 * x2 * x9');
f8 = sym('a87 * x7 + a88 * x8');
f9 = sym('a99 * x9 + a910 * x10 + a927 * x2 * x7');
f10 = sym('a109 * x9 + a1010 * x10');
X = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10];
Y1 = [0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y2 = [0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0];
Y3 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0];
Y4 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1')];
x = [sym('x1') 'x2' 'x3' 'x4' 'x5' 'x6' 'x7' 'x8' 'x9' 'x10'];
```

Система уравнений (1) может быть преобразована к форме Бруновского только в случае, если инволютивны распределения $\boldsymbol{M}^0 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4\}$, $\boldsymbol{M}^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1,\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_4\}$ и $\boldsymbol{M}^2$ для этой системы [13], где $\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4\}$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_k$ ($k = \overline{1, 4}$) – производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_k$ ($k = \overline{1, 4}$). Производные Ли вычисляются следующим образом:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_k = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_k] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_k}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_k = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_k =$$

$$= -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{10}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{Y}_k, \ k = \overline{1,4}.$$

В пакете Matlab разработаны функции для вычисления производных Ли (*Dif_Li*) и проверки условий инволютивности последовательности распределений (*involutivity*). Функция *Dif_Li*(*X*, *Y*, *x*, *N*) возвращает *N*-ю производную Ли вдоль векторного поля *X* векторного поля *Y*, по элементам вектора *x*, а функция *involutivity*(*M*, *x*) возвращает 1, если для распределения *M* условия инволютивности выполняются и 0 – если нет.

Проверку инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^0$ в пакете Matlab можно осуществить следующим образом:

```
M0 = [Y1,Y2, Y3,Y4];
involutive = involutivity(M0, x);

>>involutive = 1
```

Поскольку векторные поля $\boldsymbol{Y}_i$ $(i = \overline{1,4})$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^0$ – инволютивно и размерность распределения $\dim \boldsymbol{M}^0 = 4$.

Проанализируем распределение $\boldsymbol{M}^1$, для этого, сначала, осуществим вычисления производных Ли:

```
C1_1 = Dif_Li(X, Y1, x, 2);
M1_1 = C1_1(:, 1 : (size(C1_1, 2) - 1));
C1_2 = Dif_Li(X, Y2, x, 2);
M1_2 = C1_2(:, 1 : (size(C1_2, 2) - 1));
C1_3 = Dif_Li(X, Y3, x, 2);
M1_3 = C1_3(:, 1 : (size(C1_3, 2) - 1));
C1_4 = Dif_Li(X, Y4, x, 2);
M1_4 = C1_4(:, 1 : (size(C1_4, 2) - 1));
M1=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_1(:,2), M1_2(:,2),
M1_3(:,2), M1_4(:,2)];
involutive = involutivity(M1, x);

>>involutive = 0
```

Непосредственная проверка скобок Ли $[\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j]$, где $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$ – векторные поля из множества $\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4\}$, и ранга матриц $\boldsymbol{B}_l = \left\| \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4, [\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j] \right\|$ показывает, что распределение $\boldsymbol{M}^1$ не является инволютивным, однако все его подраспределения $\boldsymbol{M}_k^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_k\}$, $k = \overline{1,4}$, являются инволютивными:

```
M11=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1),M1_1(:,2)];
involutive = involutivity(M11, x);

>>involutive = 1

M12=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1),M1_2(:,2)];
involutive = involutivity(M12, x);

>>involutive = 1

M13=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1),M1_3(:,2)];
involutive = involutivity(M13, x);

>>involutive = 1

M14=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1),M1_4(:,2)];
involutive = involutivity(M14, x);

>>involutive = 1
```

Поэтому дополнительные переменные или интеграторы можно вводить в любой канал управления. Однако введение одного, двух или трех интеграторов в любые каналы не позволяет решить проблему получения инволютивного распределения $\boldsymbol{M}^1$ для расширенной системы. Распределение $\boldsymbol{M}^1$ становится инволютивным только при введении одного интегратора в каждый канал объекта управления.

Для расширенной модели объекта управления введем следующие обозначения:

$$y_i = x_i,\ i = \overline{1,3};\ \ y_4 = U_1^1;\ \ U_1 = \frac{dy_4}{dt};\ \ y_5 = x_4;\ \ y_6 = x_5;$$

$$y_7 = x_6;\ \ y_8 = U_2^1;\ \ U_2 = \frac{dy_8}{dt};\ \ y_9 = x_7;\ \ y_{10} = x_8;$$

$$y_{11} = U_1^2;\ \ U_3 = \frac{dy_{11}}{dt};\ \ y_{12} = x_9;\ \ y_{13} = x_{10};\ \ y_{14} = U_2^2;\ \ U_4 = \frac{dy_{14}}{dt}.$$

В этих обозначениях расширенная модель объекта записывается следующим образом:

$$\frac{dy_1}{dt} = \varphi_1 = a_{12} y_2;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \varphi_2 = a_{235} y_3 y_6 - a_{246} y_5 y_7 + a_{289} y_{10} y_{12} - a_{2,7,10} y_9 y_{13} - a_{200} - a_{220} y_2 - a_{222} y_2^2;$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \varphi_3 = a_{33} y_3 + a_{34} y_5 + y_4; \qquad \frac{dy_9}{dt} = \varphi_9 = a_{77} y_9 + a_{78} y_{10} + a_{729} y_2 y_{12};$$

$$\frac{dy_4}{dt} = U_1; \quad \varphi_4 = 0; \qquad \frac{dy_{10}}{dt} = \varphi_{10} = a_{87} y_9 + a_{88} y_{10} + y_{11};$$

$$\frac{dy_5}{dt} = \varphi_5 = a_{43} y_3 + a_{44} y_5 + a_{425} y_2 y_6; \qquad \frac{dy_{11}}{dt} = U_3; \quad \varphi_{11} = 0;$$

$$\frac{dy_6}{dt} = \varphi_6 = a_{55} y_6 + a_{56} y_7 + a_{524} y_2 y_5; \qquad \frac{dy_{12}}{dt} = \varphi_{12} = a_{99} y_{12} + a_{9,10} y_{13} + a_{927} y_2 y_9;$$

$$\frac{dy_7}{dt} = \varphi_7 = a_{65} y_6 + a_{66} y_7 + y_8; \qquad \frac{dy_{13}}{dt} = \varphi_{13} = a_{10,9} y_{12} + a_{10,10} y_{13} + y_{14};$$

$$\frac{dy_8}{dt} = U_2; \quad \varphi_8 = 0; \qquad \frac{dy_{14}}{dt} = U_4; \quad \varphi_{14} = 0.$$

С этой моделью объекта управления связаны следующие векторные поля:

```
f1 = sym('a12 * y2');
f2 = sym('a235 * y3 * y6 - a246 * y5 * y7 + a289 * y10 * y12 - a2710 *
y9 * y13 - a200 - a220 * y2 - a222 * y2^2');
f3 = sym('a33 * y3 + a34 * y5 + y4');
f4 = sym('0');
f5 = sym('a43 * y3 + a44 * y5 + a425 * y2 * y6');
f6 = sym('a55 * y6 + a56 * y7 + a524 * y2 * y5');
f7 = sym('a65 * y6 + a66 * y7 + y8');
f8 = sym('0');
f9 = sym('a77 * y9 + a78 * y10 + a729 * y2 * y12');
f10 = sym('a87 * y9 + a88 * y10 + y11');
f11 = sym('0');
f12 = sym('a99 * y12 + a910 * y13 + a927 * y2 * y9');
f13 = sym('a109 * y12 + a1010 * y13+ y14');
f14 = sym('0');
Y_new = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10; f11; f12; f13; f14];
Y1_new = [0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
```

```
Y2_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y3_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0];
Y4_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1')];
y_new = [sym('y1') 'y2' 'y3' 'y4' 'y5' 'y6' 'y7' 'y8' 'y9' 'y10' 'y11' 'y12' 'y13'
'y14'];
```

Поскольку вектора $\mathrm{Y1\_new} = \mathbf{Y}_1^*$, $\mathrm{Y2\_new} = \mathbf{Y}_2^*$, $\mathrm{Y3\_new} = \mathbf{Y}_3^*$, $\mathrm{Y4\_new} = \mathbf{Y}_4^*$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^{0*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*\}$ инволютивно.

```
M0_new=[Y1_new,Y2_new, Y3_new,Y4_new];
involutive = involutivity(M0_new, y_new);
```

```
>>involutive = 1
```

Так как производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_k^*$ ($k = \overline{1, 4}$) являются постоянными векторами:

$$\boldsymbol{L_Y Y}_1^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_1^*] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1^*}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y} - \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_1^* = \left| 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_Y Y}_2^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_2^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_2^* = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_Y Y}_3^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_3^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_3^* = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_Y Y}_4^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_4^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_4^* = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0 \right|^{\mathrm{T}},$$

то распределение $\boldsymbol{M}^{1*}$ для расширенной системы является инволютивным:

```
C1_1_new = Dif_Li(Y_new, Y1_new, y_new, 2);
M1_1_new = C1_1_new(:, 1 : (size(C1_1_new, 2) - 1));
C1_2_new = Dif_Li(Y_new, Y2_new, y_new, 2);
M1_2_new = C1_2_new(:, 1 : (size(C1_2_new, 2) - 1));
C1_3_new = Dif_Li(Y_new, Y3_new, y_new, 2);
M1_3_new = C1_3_new(:, 1 : (size(C1_3_new, 2) - 1));
C1_4_new = Dif_Li(Y_new, Y4_new, y_new, 2);
M1_4_new = C1_4_new(:, 1 : (size(C1_4_new, 2) - 1));
```

```
M1_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2)]
involutive = involutivity(M1_new, y_new);

>>involutive = 1
```

Проверка инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_4^*\}$, где $\boldsymbol{L_Y^2 Y}_k$ $(k = \overline{1, 4})$ – производные Ли второго порядка, показывает, что оно не является инволютивным.

```
M2_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2), M1_2_new(:,2),M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_1_new(:,3), M1_2_new(:,3),M1_3_new(:,3),
M1_4_new(:,3)];
involutive = involutivity(M2_new, y_new);

>>involutive = 0
```

Однако инволютивными являются подраспределения распределения $\boldsymbol{M}^{2*}$:

$$\boldsymbol{M}_1^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_1^*\};$$

$$\boldsymbol{M}_2^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_2^*\};$$

$$\boldsymbol{M}_3^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_3^*\};$$

$$\boldsymbol{M}_4^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y^2 Y}_4^*\}.$$

```
M21_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_1_new(:,3)];
involutive = involutivity(M21_new, y_new);

>>involutive = 1

M22_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_2_new(:,3)];
involutive = involutivity(M22_new, y_new);

>>involutive = 1
```

```
M23_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_3_new(:,3)];
involutive = involutivity(M23_new, y_new);

>>involutive = 1

M24_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_4_new(:,3)];
involutive = involutivity(M24_new, y_new);

>>involutive = 1
```

Этого оказывается достаточно для осуществления динамической линеаризации и получения системы линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского. На основании теоремы о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с m управлениями [13], получим, что каноническая форма Бруновского имеет четыре клетки, а индекс управляемости $k_{\max}$ для данного объекта равен четырем. Математическая модель объекта управления в форме Бруновского в пространстве "вход – состояние":

$$\begin{aligned} &\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1},\ i = \overline{1,13},\ i \neq 4,\ 8,\ 11; \\ &\frac{dz_4}{dt} = v_1;\ \frac{dz_8}{dt} = v_2;\ \frac{dz_{11}}{dt} = v_3;\ \frac{dz_{14}}{dt} = v_4, \end{aligned} \tag{2}$$

где v_j ($j = \overline{1,4}$) – управления.

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет четыре клетки, то необходимо определить четыре функции $T_j(\boldsymbol{y})$ ($j = \overline{1,4}$), преобразующие переменные расширенной модели объекта управления в переменные модели в форме Бруновского:

$$z_1 = T_1(\boldsymbol{y});\ \ z_5 = T_2(\boldsymbol{y});\ \ z_9 = T_3(\boldsymbol{y});\ \ z_{12} = T_4(\boldsymbol{y}).$$

Методика определения этих функций известна [8, 13]. В данном случае они являются однокомпонентными составляющими вектора $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_{14})$. Из этих функций путем последовательного дифференцирования вдоль векторного поля $Y^* = Y + \mathrm{U}_1 Y_1^* + \mathrm{U}_2 Y_2^* +$

$+\mathrm{U}_3 Y_3^* + \mathrm{U}_4 Y_4^*$ можно получить выражения для определения соответственно z_2, z_3, z_4 (из функции $T_1(\boldsymbol{y})$), z_6, z_7, z_8 (из функции $T_2(\boldsymbol{y})$), z_{10}, z_{11} (из функции $T_3(\boldsymbol{y})$) и z_{13}, z_{14} (из функции $T_4(\boldsymbol{y})$). В качестве примера рассмотрим получение зависимостей для определения z_2, z_3, z_4 с помощью функции $T_1(\boldsymbol{y})$. Для исследуемого объекта управления имеем: $T_1(\boldsymbol{y}) = y_1$, поэтому $z_1 = y_1$.

```
T1 = [sym('y1')];
[B, V, U] = brunovsky(Y_new, [Y1_new], T1, y_new, 4);
B = simple(B)
```

Дифференцируя функцию $T_1(\boldsymbol{y})$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}^*$ и учитывая, что z_2, z_3 и их производные не зависят от управлений, получим:

```
B =
[a12*y2;

-a12*(a222*y2^2 + a220*y2 + a200 - a289*y10*y12 - a235*y3*y6 +
a2710*y13*y9 + a246*y5*y7);

 a12*(a220 + 2*a222*y2)*(a222*y2^2 + a220*y2 + a200 - a289*y10*y12 -
a235*y3*y6 + a2710*y13*y9 + a246*y5*y7) - a12*a246*y7*(a43*y3 +
a44*y5 + a425*y2*y6) - a12*a2710*y13* (a78*y10 + a77*y9 +
a729*y12*y2) + a12*a235*y3* (a55*y6 + a56*y7 + a524*y2*y5) +
a12*a289*y10*(a910*y13 + a99*y12 + a927*y2*y9) - a12*a2710*y9*(y14 +
a109*y12 + a1010*y13) + a12*a235*y6*(y4 + a33*y3 + a34*y5) +
a12*a289*y12*(y11 + a88*y10 + a87*y9) - a12*a246*y5*(y8 + a65*y6 +
a66*y7)];
```

Таким образом функции перехода к канонической форме Бруновского могут быть записаны следующим образом:

$$z_2 = \frac{dz_1}{dt} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*} T_1(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} T_1(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{14} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \varphi_i = a_{12} y_2 ;$$

$$z_3 = \frac{dz_2}{dt} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} T_1(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} (a_{12} y_2) = \sum_{i=1}^{14} \frac{\partial (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} T_1(\boldsymbol{y}))}{\partial y_i} \varphi_i = a_{12} \varphi_2 =$$

$$= a_{12}(a_{235}y_3y_6 - a_{246}y_5y_7 + a_{289}y_{10}y_{12} - a_{2,7,10}y_9y_{13} - a_{200} - a_{220}y_2 - a_{222}y_2^2);$$

$$z_4 = \frac{dz_3}{dt} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 T_1(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}(a_{12}\varphi_2) = \sum_{i=1}^{14} \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}(a_{12}\varphi_2))}{\partial y_i}\varphi_i =$$

$$= a_{12}[(-a_{220} - 2a_{222}y_2)\varphi_2 + a_{235}y_6\varphi_3 - a_{246}y_7\varphi_5 + a_{235}y_3\varphi_6 - a_{246}y_5\varphi_7 -$$

$$-a_{2,7,10}y_{13}\varphi_9 + a_{289}y_{12}\varphi_{10} + a_{289}y_{10}\varphi_{12} - a_{2,7,10}y_9\varphi_{13}].$$

Аналогичным образом могут быть получены соотношения для определения остальных переменных модели Бруновского.

Выводы. Разработан алгоритм и программа для автоматизации преобразования широкого класса нелинейных систем к линейному виду в пакете Matlab с помощью инволютивных распределений геометрической теории управления. Получена линейная математическая модель движения дизель-поезда в канонической форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу двух двигателей.

Список литературы: **1.** *Бауэр Х.П.* Оптимальное использование сцепления на электровозе с трехфазным тяговым приводом / *Х.П. Бауэр* // Железные дороги мира. – 1987. – № 8. – С. 10-23. **2.** *Ohishi K.* Adhesion control of electric motor coach based on force control using disturbance observer / *K. Ohishi, Y. Ogawa* // IEEE, Advanced Motion Control. – April, 2000. – P. 323-328. **3.** Тяговые и токовые характеристики электроподвижного состава с асинхронным тяговым двигателем / *Омельяненко В.И., Калюжный Н.Н., Кулиш Т.А., Кривякин Г.В.* // Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: Тезисы LXVI международной конференции. – Днепропетровск: ДИИТ, 2006. – С. 123. **4.** *Шапран Е.Н.* Совершенствование микропроцессорных систем управления с высоким использованием сил сцепления / *Е.Н. Шапран* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2006. – № 23. – С. 145-154. **5.** Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / *Носков В.И., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Леонов С.Ю.* – Х.: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. **6.** *Артеменко А.Н.* Система автоматического выравнивания нагрузки тягового электропривода карьерного электровоза / *А.Н. Артеменко* // Вісник Кременчуцького державного університету ім. Михайло Остроградського. – Кременчук: КДН ім. Михайло Остроградського. – 2010. – Вип. 4. – Частина 3. – С. 56-58. **7.** *Притула М.Г.* Моделювання та розрахунок оптимальних параметрів руху поїздів / *М.Г. Притула, Р.Р. Шпакович* // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 139-145. **8.** *Дмитриенко В.Д.* Синтез оптимальных законов управления тяговым электроприводом методами дифференциальной геометрии и принципа максимума / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС. – 2009. – Вип. 4 (78). – С. 42-51. **9.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти томах. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. *К.А. Пупкова* и *И.Д. Егунова*. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. **10.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. *К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с. **11.** *Дмитриенко В.Д.* Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2007. – № 19. – С. 64-77. **12.** *Дмитриенко В.Д.*

Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный*. – Х.: Изд. центр "НТМТ", 2013. – 248 с. **13.** *Краснощёченко В.И.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Грищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Baujer H.P.* Optimal'noe ispol'zovanie sceplenija na jelektrovoze s trehfaznym tjagovym privodom / *H.P. Baujer* // Zheleznye dorogi mira. – 1987. – № 8. – S. 10-23. **2.** *Ohishi K.* Adhesion control of electric motor coach based on force control using disturbance observer / *K. Ohishi, Y. Ogawa* // IEEE, Advanced Motion Control. – April, 2000. – S. 323-328. **3.** Tjagovye i tokovye harakteristiki jelektropodvizhnogo sostava s asinhronnym tjagovym dvigatelem / *Omel'janenko V.I., Kaljuzhnyj N.N., Kulish T.A., Krivjakin G.V.* // Problemy i perspektivy razvitija zheleznodorozhnogo transporta: Tezisy LHVI mezhdunarodnoj konferencii. – Dnepropetrovsk: DIIT, 2006. – S. 123. **4.** *Shapran E.N.* Sovershenstvovanie mikroprocessornyh sistem upravlenija s vysokim ispol'zovaniem sil sceplenija / *E.N. Shapran* // Visnik NTU "HPI". – Harkiv: NTU "HPI". – 2006. – № 23. – S. 145-154. **5.** Modelirovanie i optimizacija sistem upravlenija i kontrolja lokomotivov / *Noskov V.I., Dmitrienko V.D., Zapolovskij N.I., Leonov S.Ju.* – H.: HFI "Transport Ukrainy", 2003. – 248 s. **6.** *Artemenko A.N.* Sistema avtomaticheskogo vyravnivanija nagruzki tjagovogo jelektroprivoda kar'ernogo jelektrovoza / *A.N. Artemenko* // Visnik Kremenchuc'kogo derzhavnogo un iversitetu im. Mihajlo Ostrograds'kogo. – Kremenchuk: KDN im. Mihajlo Ostrograds'kogo. – 2010. – Vip. 4. – Chastina 3. – S. 56-58. **7.** *Pritula M.G.* Modeljuvannja ta rozrahunok optimal'nih parametr iv ruhu poïzdiv / *M.G. Pritula, R.R. Shpakovich* // Fiziko-matematichne modeljuvannja ta informacijni tehnologiï. – 2007. – Vip. 5. – S. 139-145. **8.** *Dmitrienko V.D.* Sintez optimal'nyh zakonov upravlenija tjagovym jelektroprivodom metodami differencial'noj geometrii i principa maksimuma / *V.D. Dmitrienko, A.Ju. Zakovorotnyj* // Sistemi obrobki informaciï. – Harkiv: HUPS. – 2009. – Vip. 4 (78). – S. 42-51. **9.** Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija: Uchebnik v 5-ti tomah. T. 4: Teorija optimizacii sistem avtomaticheskogo upravlenija / Pod red. *K.A. Pupkova i I.D. Egunova*. – M.: MGTU im. N.Je. Baumana, 2004. – 744 s. **10.** Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija: Uchebnik v 5-i tomah. T. 5: Metody sovremennoj teorii upravlenija / Pod red. *K.A. Pupkova, N.D. Egunova.* – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2004. – 784 s. **11.** *Dmitrienko V.D.* Linearizacija matematicheskoj modeli privoda metodami differencial'noj geometrii / *V.D. Dmitrienko, A.Ju. Zakovorotnyj* // Visnik NTU "HPI". – Harkiv: NTU "HPI". – 2007. – № 19. – S. 64-77. **12.** *Dmitrienko V.D.* Modelirovanie i optimizacija processov upravlenija dvizheniem dizel'-poezdov / *V.D. Dmitrienko, A.Ju. Zakovorotnyj*. – H.: Izd. centr "HTMT", 2013. – 248 s. **13.** *Krasnoshhjochenko V.I.* Nelinejnye sistemy: geometricheskij metod analiza i sinteza / *V.I. Krasnoshhjochenko, A.P. Grishhenko*. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana. – 2005. – 520 s.

Поступила (received) 19.06.2014

Статью представил д-р техн. наук, проф., заслуженный изобретатель Украины, зав. кафедрой "Системы информации" НТУ "ХПИ" Серков А.А.

Dmitrienko Valerii, Dr.Tech.Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Frunze, 21, Kharkiv, Ukraine, 61002
tel./phone: +38 (057) 707-61-98, e-mail: valdmitrienko@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-2523-595X

Zakovorotniy Alexandr, Cand.Tech.Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Frunze, 21, Kharkiv, Ukraine, 61002
tel./phone: +38 (067) 546-35-27, e-mail: arcade@i.ua
ORCID ID: 0000-0003-4415-838X

Nesterenko Artur, graduate student
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Frunze, 21, Kharkiv, Ukraine, 61002
tel./phone: +38 (068) 889-32-80, e-mail: arthurio.iamcat@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-4643-7641