УДК 621.87

В.В. ГОРБАЧЁВ, канд. техн. наук НТУ “ХПИ” (г. Харьков),
В.И. ГАРНЫХ (г. Харьков)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА СВЯЗИ

В статті розглянуто математичні моделі дискретного каналу зв’язку. Було показано, що найбільш відпрацьованою в плані створення математичного апарату для розв’язання завдань аналізу показників якості передачі дискретної інформації є марківські моделі.

Mathematical models of the discrete channel relationship are considered in article. There was is shown, the studied carefullied in plan of the making the mathematical device for decision of the problems of the analysis of the factors quality issues to discrete information are Markov’s models.

Постановка проблемы. Рассмотрение процессов передачи информации на уровне дискретного канала предполагает наличие математической модели, которая достаточно адекватно описывает процессы трансформации символов алфавита при их передаче. Анализ широко распространенных симметричных каналов, для которых вероятность ошибки не зависит от статистики передаваемой последовательности символов, может быть выполнен на основе исследования потока ошибок на выходе дискретного канала [2]. При этом математическая модель канала должна позволять находить вероятностные характеристики процесса передачи информации без обращения к экспериментальным данным или дополнительным предположениям (требование полноты).

Цель статьи – рассмотреть существующие математические модели и определить основные базы построения общих моделей дискретного канала, проанализировать их, обосновать применение на практике.

Основная часть. Исторически первой моделью потока ошибок в дискретном канале была биномиальная модель, которая характеризовалась одним параметром p_0 – вероятностью неправильного приема единичного элемента. Эта модель основана на предположении независимости возникновения ошибок. В то же время установление факта группирования ошибок практически во всех реальных каналах стимулировало создание большого числа моделей, которые отображали память канала.

Более поздние модели разработаны таким образом, что соответствующим подбором параметров возможно описать каналы разной физической природы. Универсальность описания достигается за счет варьирования числа параметров – объема модели. Как правило, объем модели согласовывают с понятием числа состояний канала. При этом имеется возможность один и тот же канал описать с одинаковой степенью адекватности разными универсальными моделями. Преимущество отдается по совокупности двум критериям –

простоте (по минимуму числа состояний канала или общего числа параметров) и степени применимости модели для решения поставленной задачи (очевидности или наработанности приемов).

Можно выделить три основные базы построения общих моделей дискретного канала: простая цепь Маркова, процессы восстановления с конечным временем и процессы накопления данных. Наиболее проработанной в плане создания математического аппарата для решения задач анализа показателей качества передачи дискретной информации являются марковские модели [1]. Наибольшую скорость сходимости (по общему числу параметров) при обработке больших потоков экспериментальных данных обеспечивает каскадный вариант построения марковской модели.

Описание дискретного канала со стираниями может строиться как самостоятельная модель потока ошибок и стираний. Более распространенным приемом является построение модели канала со стираниями на базе известных моделей без стираний путем дополнения последних рядом предположений о взаимосвязи ошибок и стираний. Целесообразность указанного приема определяется тем, что накопленный к настоящему времени большой опыт построения моделей базируется на экспериментальном материале, полученном на каналах без стираний.

Удобными для использования в расчетах и достаточно мотивированными являются следующие допущения о связи между стираниями и ошибками:

- правильные стирания среди ошибочно отождествленных элементов статистически независимы, а вероятность правильного стирания не зависит от кратности ошибок в кодовом блоке;
- ложные стирания среди правильно отождествленных элементов статистически независимы, а вероятность ложного стирания не зависит от кратности ошибки в кодовом блоке;
- правильные и ложные стирания статистически независимы.

При этом дополняющими параметрами являются вероятность ложного $p_{\text{л.с}}(\mathbf{l},m)$ и правильного $p_{\text{п.с}}(\mathbf{l},m)$ стираний, где $\mathbf{l}$ – кратность ошибок; m – длина кодового блока. Практически при всех способах передачи кодовых блоков $p_{\text{п.с}}$ вид вероятности $p_{\text{л.с}}(\mathbf{l},m)$ зависит от способа кодирования и от структуры ошибок. При отсутствии сведений о структуре ошибок используют формулу

$$p_{\text{л.с}}(\mathbf{l},m) = \frac{\mathbf{l}-(m-\mathbf{l})\,p_{\text{л.с.о}}}{m}, \qquad (1)$$

где $p_{\text{л.с.о}}$ – вероятность ложного стирания в блоках, которые не содержат ошибки. Это единственный параметр, подлежащий определению и который отображает специфику способа формирования сигнала стирания.

При решении задач сравнительного анализа систем и выполнении предварительных расчетов применение полной модели дискретного канала в ряде случаев невозможно из-за отсутствия экспериментальных данных, необходимых для расчета ее параметров. В таких случаях используют частичные описания канала, которые непосредственно определяют или позволяют рассчитать вероятность $P(>\mathbf{l}, m)$ приема кодового блока с длинной m символов и кратностью ошибок, не меньшей $\mathbf{l}$.

Как было отмечено ранее, широкое использование получило двухпараметрическое описание канала, по параметрам которого имеются достаточно подробные и надежные справочные данные. По результатам обработки материалов испытаний выделены три класса распределений интервалов между ошибками и предложены соответствующие аппроксимации этих распределений: модель типа А для тропосферных телефонных каналов; модель В для телефонных каналов кабельных и радиорелейных линий; модель С для телеграфных коротковолновых каналов и проводных линий связи [2].

Для многих современных систем передачи дискретной информации характерным является использование блоковых кодов. При исследовании вероятностных характеристик таких систем исходным процессом является последовательность решений декодера – второй решающей схемы. Это обусловливает целесообразность двухуровневого описания канала: модель первого уровня описывает ошибки по символам, и применяется для оценивания эффективности выбранного кода и расчетов параметров модели второго уровня, аппроксимирующей поток ошибок на длине кодовых блоков.

Если на первом уровне использовать полную модель дискретного канала, то структура второго уровня определяется однозначно. Например, если первый (символьный) уровень описан марковской моделью, которая характеризуется числом состояний канала *K*, матрицей переходных вероятностей $B = [B_{ij}]$, $i = 0,...,K-1$; $j = 0,...,K-1$ и условными вероятностями ошибок в каждом состоянии t_j $j = 0,...,K-1$, то модель второго (блокового) уровня также марковская с тем же числом состояний *K*.

Матрица *P* переходных вероятностей второго уровня определяется соотношением $P = B^m$, где m – число символов в блоке. Условные вероятности q_j искажения блока вычисляются при помощи матриц $B_1(0) = [(1-t_j)\, B_{ij}]$; $B_1(1) = [t_j\, B_{\boldsymbol{j}}]$, которые представляют собой матричные вероятности того, что символ будет принят правильно и ошибочно соответственно. Прежде всего, находят матричные вероятности приема кодового блока без ошибок и с ошибками

$$P_1(0) = B_1^m(0)\,; \tag{2}$$

$$P_1(1) = B^m - B_1^m(0) = P - P_1(0)\,; \tag{3}$$

затем искомые вероятности

$$q_j = \frac{E_{ij}(P_1(1))}{E_{ij}(P)}, \tag{4}$$

где $j = 0,...,K\text{-}1$, i – любое из множества $\{0,2,...,K-1\}$, $E_{ij}(\cdot)$ – элемент с индексами i, j-матрицы, указанной в скобках.

Если первый уровень (дискретный канал) описать частичной моделью, то структура модели второго уровня не определена и необходимы дополнительные соображения по ее организации. Как правило, ограничиваются биномиальным распределением, то есть считают, что кодовые блоки искажаются независимо [2]. Более точные результаты получаются при использовании на втором уровне простой цепи Маркова с двумя состояниями: «0» – кодовый блок ошибок не содержит; «1» – блок принят с ошибками. Модель описывается матрицей переходных вероятностей $P = [p_{ij}]$, $i = \overline{0,1}$; $j = \overline{0,1}$, элементы которой вычисляются по следующим формулам:

$$P_1 = P(\geq 1, m); \tag{5}$$

$$P_0 = 1 - P_1; \tag{6}$$

$$p_{00} = \frac{[1 - P(\geq 1, 2m)]}{[1 - P(\geq 1, m)]}; \tag{7}$$

$$p_{01} = 1 - p_{00}; \tag{8}$$

$$p_{10} = P_0 p_{01} / P_1; \tag{9}$$

$$p_{11} = 1 - p_{10}, \tag{10}$$

где P_0, P_1 – абсолютные вероятности приема кодового блока без ошибок и с ошибками соответственно; $P(\geq 1, m)$ – вероятность, которая определяется первым уровнем описания канала.

Наиболее часто в практических расчетах применяется частичная модель канала с группированием ошибок, согласно которой

$$P(\geq 1, m) = 1 - \exp\left(m^{1-g} \ln(1 - p_0)\right), \tag{11}$$

где p_0 – вероятность искажения символа; γ – показатель группирования.

Вероятности p_{ij} при этом определяются равенствами

$$p_{00} = \exp[(2^{1-g} - 1) \cdot m^{1-g} \cdot \ln(1 - p_0)]; \tag{12}$$

$$p_{01} = 1 - p_{00};\tag{13}$$

$$p_{10} = \frac{\exp[m^{1-g}\ln(1-p_0)] - \exp[(2m)^{1-g}\ln(1-p_0)]}{1-\exp[m^{1-g}\ln(1-p_0)]}\tag{14}$$

$$p_{11} = 1 - p_{10}\tag{15}$$

Широкое применение этой модели обусловлено тем, что по значениям ее параметров имеются подробные и надежные экспериментальные данные.

Достичь дальнейшего повышения адекватности описания возможно, если цепью Маркова описывать не поток ошибочных кодовых блоков, а последовательность состояний канала, каждое из которых характеризуется условной вероятностью ошибки блока. При этом поток ошибок становится марковской функцией, и описание второго уровня приобретает форму общей марковской модели [1].

Ограниченное информационное содержание частичного описания не позволяет определить параметры марковской модели без дополнительных сведений о канале. Если использовать гипотезу о геометрическом законе распределения длин серий ошибочных блоков, то возможно определить параметры аналога модели Гильберта, который базируется на односвязной цепи Маркова с двумя состояниями: «0» – хорошее состояние канала, блоки ошибками не поражаются; «1» – состояние канала плохое, и с вероятностью q блоки поражаются ошибками. Термин «аналог» использован по той причине, что модель Гильберта описывает ошибки по символам, здесь же речь идет об ошибках по блокам. При этом описание второго уровня дискретного канала характеризуется матрицей переходных вероятностей $P = [p_{ij}]$, $i = \overline{0,1}$; $j = \overline{0,1}$ и вероятностью ε возникновения ошибок в состоянии «1», которые рассчитываются через параметры модели первого уровня в соответствии с формулами

$$P_{00} = 1 - p_{01};\tag{16}$$

$$p_{01} = \frac{Ap_{10}}{e - A};\tag{17}$$

$$P_{10} = 1 - p_{11};\tag{18}$$

$$p_{11} = \frac{AC - B^2}{2AC - B(A+C)};\tag{19}$$

$$q = B / p_{11},\tag{20}$$

где $A = P(1)$; $B = P(11)/P(1)$; $C = \dfrac{P(111)}{P(111)+P(101)}$;

$$P(1) = P(\geq 1, m)\ ; \tag{21}$$

$$P(11) = 2P(\geq 1, m) - P(\geq 1, 2m)\ ; \tag{22}$$

$$P(101) = 2P(\geq 1, 2m) - P(\geq 1, m) - P(\geq 1, 3m)\ ; \tag{23}$$

$$P(11) = P^2(11)/P(1)\ . \tag{24}$$

Применение цепи Маркова с двумя состояниями обусловлено тем, что частичные описания канала не позволяют определить параметры цепей с большим числом состояний. Однако для большинства практических задач такая аппроксимация вполне приемлема, поскольку структура памяти канала на блоковом уровне значительно проще, чем на битовом, – корреляция между отдельными пакетами ошибок незначительная, а распределение длин пакетов близко к геометрическому закону.

Выводы. Рассмотрены математические модели дискретного канала связи. Выявлено, что имеется возможность один и тот же канал описать с одинаковой степенью адекватности разными универсальными моделями.

Можно выделить три основные базы построения общих моделей дискретного канала: простая цепь Маркова, процессы восстановления с конечным временем и процессы накопления данных. Целесообразным является двухуровневое описание канала: модель первого уровня описывает ошибки по символам, и применяется для оценивания эффективности выбранного кода и расчетов параметров модели второго уровня, аппроксимирующей поток ошибок на длине кодовых блоков.

Наиболее часто в практических расчетах применяется частичная модель канала с группированием ошибок. Широкое применение этой модели обусловлено тем, что по значениям ее параметров имеются подробные и надежные экспериментальные данные.

Список литературы: 1. *Коричнев П.П., Королёв В.Д.* Статистический контроль каналов связи.– М.: Радио и связь, 1989. **2.** *Горбачов В.В.* Оцінка статистичних характеристик потоку помилок на виході ДКЗ. Збірка робіт, частина 2. – Київ: НДЦ КВІУЗ, 1992.

Поступила в редколлегию 05.12. 2008 г.