УДК 519.681

***О.В. СЕРАЯ***, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

# НЕЧЕТКАЯ ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

У задачі планування виробництва розглянуто окремий випадок, коли цільова функція зредукована до лінійної. Запропоновано методи розв'язання задачі лінійного програмування, яка при цьому виникла, параметри цільової функції якої – нечіткі числа. Для загального випадку описані чисельний і наближений методи розв'язання задачі. У окремому випадку, коли в задачі одне обмеження, отримано аналітичне рішення.

The special case is considered in the task of production planning, when an objective function is reduced to linear. The methods of decision of arising up here task of the linear programming are offered parameters of objective function of which are unclear numbers. For a general case the numeral and close methods of decision of task are described. In special case, when the task has one limitation an analytical decision is got.

**Введение.** В технике, экономике, социологии, медицине и т.д. возникает необходимость в решении специфического класса задач, имеющих следующую однотипную математическую модель. Пусть, например, необходимо произвести $n$ видов продукции. Для каждого, например, $j$-го вида задана функция $j_j(x_j)$ выигрыша, получаемого при реализации $j$-го вида продукции в количестве $x_j$, $j = 1, 2, ..., n$. В процессе производства продукции расходуется $m$ типов ресурсов, объем которых ограничен набором $(b_1, b_2, ..., b_m)$. Кроме того, должна быть задана матрица $A = (a_{ij})$, элемент которой $a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, определяет расход $i$-го типа ресурса при производстве единицы продукции $j$-го вида. При этом задача планирования производства может быть сформулирована следующим образом: найти план производства $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, максимизирующий суммарный выигрыш

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} j_j\left(x_j\right) \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = 1, 2, ..., m, \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, ..., n. \qquad (3)$$

Методы решения таких задач известны [1, 2]. В простейшем частном случае, когда выигрыш интерпретируется как доход от реализации продукции, целевая функция (1) редуцируется к линейной. Если при этом $c_j$ - стоимость единицы продукции $j$-го вида, то функция (1) упрощается к виду

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ . \qquad (4)$$

Тогда задача отыскания вектора $X$, макимизируещего (4) и удовлетворяющего (2), (3), является стандартной задачей линейного программирования [3]. При решении этой задачи проблемы возникают, когда параметры задачи, например, стоимости $c_j$, $j = 1, 2, ..., n$, не могут быть определены точно. В случае, если эти стоимости – случайные величины с известными плотностями распределения, то соответствующая задача входит в класс задач стохастического программирования [4]. Технология решения таких задач основана на их преобразовании к обычным задачам математического программирования. Проанализируем теперь ситуацию, когда модель задачи формулируется в терминах нечеткой математики. При этом для описания меры нечеткости каждого нечеткого значения стоимости $c_j$ единицы продукта вводится функция принадлежности $m_j(c_j)$, $j = 1, 2, ..., n$. Хорошо известный подход к решению возникающей при этом нечеткой задачи линейного программирования сводится к следующему [5, 6]. Выберем некоторый уровень принадлежности $a$ и для всех нечетких параметров задачи $c_j$ найдем интервалы значений такие, что

$$m_j(c_j) \geq a \ , \ j = 1, 2, ..., n . \qquad (5)$$

Поскольку функции принадлежности нечетких чисел $c_j$ - выпуклы вверх, то левые и правые границы интервалов возможных значений $c_j$, удовлетворяющих (5), отыскиваются из уравнений

$$c_j = m_j^{-1}(a), \ j = 1, 2, ..., n ,$$

имеющих по два корня. Теперь задача сводится к следующей четкой задаче математического программирования: найти наборы $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, максимизирующие (4) и удовлетворяющие ограничениям (2), (3) и, кроме того, ограничениям

$$c_j \in \left[ c_{j\min}(a), c_{j\max}(a) \right], \ j = 1, 2, ..., n ,$$

где $m_j\left(c_{j\min}(a)\right) = m_j\left(c_{j\max}(a)\right) = a$ , $j = 1, 2, ..., n$. (6)

Недостатки этого подхода очевидны.

Во-первых, размерность этой задачи выше размерности исходной задачи: число неизвестных увеличилось вдвое и равно $2n$, а число ограничений возросло до $(n+m)$. Во-вторых, полученная задача оказывается квадратической. В-третьих, нечеткому результату решения полученной задачи соответствует нечеткое значение целевой функции, уровень принадлежности которого остается неизвестным. В-четвертых, различная нечеткость параметров целевой функции задачи в различной и неконтролируемой степени определяет нечеткость результата.

**Цель статьи** - разработка принципиально иного подхода к решению нечетких задач линейного программирования, ослабляющего отмеченные недостатки традиционного.

**Постановка задачи.** Пусть задана задача линейного программирования с целевой функцией (4), которую нужно максимизировать, и ограничениями (2), (3). Параметры $c_j$, $j=1,2,...,n$, целевой функции заданы нечетко своими функциями принадлежности

$$m_j(c_j)=\exp\left\{-\frac{(c_j-\bar{c}_j)}{2s_j^2}\right\},\ \ j=1,2,...,n. \tag{7}$$

Требуется найти решение $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ задачи (2) – (4), обеспечивающее заданную степень принадлежности получаемого нечеткого значения целевой функции.

**Основные результаты.** Введем $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ - некоторый набор, удовлетворяющий ограничениям (2), (3). Этому набору соответствует нечеткое значение целевой функции (4), функция принадлежности которого с учетом (7), как легко показать, имеет вид

$$m_\Sigma(L)=\exp\left\{-\frac{(L-m_\Sigma)^2}{2D_\Sigma}\right\}, \tag{8}$$

где $m_\Sigma=\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{c}_j x_j$, $D_\Sigma=\sum\limits_{j=1}^{n}s_j^2 x_j^2$.

Зададим некоторое значение $a$ функции принадлежности (8), которому соответствуют два значения $L$, отыскиваемых из уравнения

$$\exp\left\{-\frac{(L-m_\Sigma)^2}{2D_\Sigma}\right\}=a\ .$$

Отсюда

$$L_{1,2}=m_\Sigma\pm\left(2D_\Sigma\ln\frac{1}{a}\right)^{1/2}=m_\Sigma\pm kD_\Sigma^{1/2},\ \ k=\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)^{1/2}.$$

Выберем $L^*$ из условия

$$L^*=\min\left\{m_\Sigma-kD_\Sigma^{1/2},m_\Sigma+kD_\Sigma^{1/2}\right\}.$$

При этом

$$L^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - k\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 x_j\right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Теперь исходная нечеткая задача сведена к следующей четкой задаче математического программирования: найти вектор $X^T = (x_1 x_2 ... x_n)$, максимизирующий (9) и удовлетворяющий (2), (3). Эта задача решается численно (например, методом штрафных функций). Приближенное решение может быть легко получено, если использовать следующее очевидное с учетом (3) неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 x_j^2\right) \le \left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j\right)^2.$$

При этом

$$\hat{L} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - k\sum_{j=1}^{n} s_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j - ks_j\right) x_j \le \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - k\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 x_j^2\right)^{1/2}.$$

Таким образом, значение $L^*$ мажорирует $\hat{L}$ на всех наборах $X = (x_1 x_2 ... x_n)$. Поэтому максимизация по $X$

$$\hat{L} = \sum_{j=1}^{n} h_j x_j, \quad h = \bar{c}_j - ks_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (10)$$

приближенно обеспечивает максимизацию (9).

Таким образом, исходная задача сведена к обычной четкой задаче линейного программирования (2), (3), (10).

Полученная задача имеет аналитическое решение, если в процессе производства расходуется однородный ресурс, то есть $m = 1$. При этом набор ограничений (2) редуцируется к одному:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b. \qquad (11)$$

Используя (9), определим структуру компонентов оптимального решения задачи. Имеем

$$\frac{\partial L^*(x)}{\partial x_j} = \bar{c}_j - k\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 x_j^2\right)^{-1/2} s_j^2 x_j, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (12)$$

Приравнивая (12) к нулю, получим

$$x_j^* = \frac{\bar{c}_j}{s_j^2} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 \left(x_j^*\right)^2\right)^{1/2}, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (13)$$

Из полученного соотношения следует, что каждая из компонентов искомого набора $X^* = \left\{x_j^*\right\}$ может быть представлена как произведение двух сомножителей, первый из которых однотипным образом определяется параметрами функций принадлежности (7) нечетких значений коэффициентов целевой функции, а второй представляет собой одинаковый для всех компонентов решения коэффициент пропорциональности. Его численное значение найдем из ограничения (11). Подставим (13) в (11).

При этом $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^* = \left( \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j \bar{c}_j}{s_j^2} \right) \frac{1}{k} \left( \sum\limits_{j=1}^{n} s_j^2 \left(x_j^*\right)^2 \right)^{1/2} = b$.

Тогда $$\frac{1}{k} \left( \sum_{j=1}^{n} s_j^2 \left(x_j^*\right)^2 \right)^{1/2} = \frac{b}{\left( \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j \bar{c}_j}{s_j^2} \right)}. \tag{14}$$

Наконец, подставляя (14) в (13), окончательно получим

$$x_j^* = \frac{\bar{c}_j}{s_j^2} \cdot \frac{b}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j \bar{c}_j}{s_j^2}} = \frac{\frac{\bar{c}_j}{s_j^2}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j \bar{c}_j}{s_j^2}} \cdot b, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Заметим, что полученное оптимальное решение (15) не зависит от выбора $\alpha$ .

**Выводы.** Таким образом, предложенная вычислительная процедура обеспечивает численное решение нечеткой задачи линейного программирования с заданным уровнем принадлежности значения целевой функции на оптимальном наборе. Для частного случая, когда число ограничений равно одному, получено аналитическое решение в замкнутой форме.

**Список литературы:** **1.** *Гурин Л.С.* Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. / *Л.С. Гурин, Я.С. Дымарский, А.Д. Меркулов.*– М.: «Сов. радио», 1968. **2.** *Раскин Л.Г.* Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. / *Л.Г. Раскин.* – М.: «Сов. радио», 1976. – 344с. **3.** *Юдин Д.Б.* Задачи и методы линейного программирования. / *Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн.* – М.: «Сов. радио», 1964. – 736с. **4.** *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. / *Д.Б. Юдин.* – М.: «Сов. радио», 1979. – 385с. **5.** *Negoita C.V.* On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning. / *C.V. Negoita, M. Sularia.* – ECEESR, 1, 1976, p. 3-14. **6.** *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. / *С.А. Орловский.* – М.: Наука, 1984. – 206с.

*Поступила в редколлегию 26.11.08*