УДК 519.681

***О.В. СЕРАЯ***, доцент, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»
***Е.В. ЧУМАКОВА***, студент НТУ «ХПИ»

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ В ЗАДАЧАХ ВЫБОРА ПРЕДПОЧТЕНИЙ

З використанням імітаційного експерименту досліджена швидкість збіжності процедури корекції матриці попарних порівнянь характеристик об'єктів. Встановлена залежність швидкості збіжності від розмірності матриці і ступеня розузгодності її елементів.

Degree of convergence of the correction procedure of matrix pairwise comparisons descriptions of objects with the use of imitation experiment is investigational. Dependence of degree of convergence is set on the dimension of matrix and degree of elements distortion.

**Введение.** Задача выбора предпочтений для сравниваемых объектов – традиционная задача человеческой практики. При этом, если объект характеризуется значениями $n$ параметров (например, $F_1, F_2, \dots, F_n$), то задача выбора сводится к отысканию и использованию какого – либо обоснованного правила, в соответствии с которым можно было бы сравнить вектор $(F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{in})$ параметров $i$ -го объекта и вектор $(F_{k1}, F_{k2}, \dots, F_{kn})$ параметров $k$ - го объекта. Общеизвестные трудности непосредственного использования в этих целях векторного критерия инициировали разработку разнообразных приемов скаляризации критерия. Одной из таких наиболее часто используемых процедур скаляризации является расчет средневзвешенного показателя по формуле

$$y_i = w_1 F_{i1} + w_2 F_{i2} + \dots + w_n F_{in} = \sum_{j=1}^{n} w_j F_{ij} ,$$

где $y_i$ – вычисленные значения скалярного показателя для $i$-го объекта; $w_j$ – вес $j$-го параметра; $F_{ij}$ – значение $j$-го параметра для $i$-го объекта.

Понятно, что использование подобных соотношений будет тем более корректным, чем точнее будут определены весовые коэффициенты $w_j$, $j = \overline{1,n}$. Для их оценки обычно используют результаты опроса экспертов. Качество оценки весовых коэффициентов при этом, как правило, бывает невысоким, ввиду традиционно плохой согласованности мнений экспертов. Гораздо лучшие результаты могут быть получены, если для расчета весовых коэффициентов использовать данные о попарных сравнениях значимости контролируемых параметров. Эти данные сводят в матрицу

$$A = \{a_{ij}\} ,$$

где $a_{ij}$ – уровень значимости параметра $i$ по сравнению с параметром $j$.

Потребуем, чтобы эта матрица обладала следующими свойствами:

1. для любого элемента матрицы $a_{ij} = 1/a_{ji}$;

2. для любой тройки $(i, j, k)$, задающей элементы $a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}$ матрицы $A$ выполняется соотношение

$$a_{ik} = a_{ij} a_{jk} . \tag{1}$$

Такую матрицу будем называть согласованной. Просуммируем левую и правую части этого равенства по $j$. При этом

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk}, \quad i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n},$$

откуда следует

$$a_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk}, \; i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n}.$$

Матричный аналог этого соотношения имеет вид:

$$\frac{1}{n} AA = A . \tag{2}$$

Предположим, что известны весовые коэффициенты $w_1, w_2, \ldots, w_n$ задающие значимости (важность, ценность) параметров. Тогда значимость $i$-го параметра по сравнению с $j$-м естественно оценивать по формуле

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \; i, j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

откуда

$$a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = 1, \; i, j = \overline{1,n} . \tag{4}$$

Суммируя (4) по $j$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = n w_i, \; i = \overline{1,n} .$$

Это соотношение в матричной форме имеет вид

$$Aw = nw .$$

Отсюда следует, что для обратносимметричной положительной матрицы $A$ имеется собственное число, равное $n$, и соответствующий этому числу положительный собственный вектор $w$, компонентами которого являются веса элементов. Понятно, что если матрица $A$ задана, то неизвестный вектор $w$ может быть получен путем расчета собственного вектора этой матрицы, соответствующего собственному числу, равному $n$. В [1] показано, что этот вектор $w$ может быть рассчитан по формулам

$$w_i = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Понятно, что соотношения (5) позволят точно оценить веса сравниваемых параметров только, если для элементов марицы $A$ выполняется (1). Однако, на практике матрица $A$, содержащая результаты попарных сравнений значимости признаков, определяемых экспертами, конечно, таковой не является.

В [1] предложена итерационная процедура коррекции матрицы попарных сравнений, приводящая ее к согласованной. Сходимость этой процедуры проведена экспериментально. Важным является вопрос о скорости сходимости процедуры согласования.

**Цель работы** – исследовать зависимость скорости сходимости процедуры коррекции от размерности матрицы попарных сравнений и степени рассогласованности ее элеметнов.

**Основные результаты.** В соответствии с [1] процедура коррекции организована следующим образом. Пусть проделано $l$ шагов согласования, в результате чего получена матрица $\left(\hat{a}_{ij}^{(l)}\right)$. На очередном $(l+1)$-м шаге осуществляется пересчет элементов этой матрицы по формулам

$$\hat{a}_{ij}^{(l+1)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}}{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

$$a_{ji}^{(l+1)} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}}}{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(l)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_{ij}^{(l+1)}}, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Пусть, например, по результатам экспертного оценивания получена матрица попарных сравнений

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,08 & 0,04 & 0,15 & 1,5 \\ 5 & 1 & 0,5 & 0,2 & 0,8 & 10 \\ 12,5 & 2 & 1 & 0,5 & 2,0 & 15 \\ 25 & 5 & 2 & 1 & 4 & 40 \\ 6,667 & 1,25 & 0,5 & 0,25 & 1 & 10 \\ 0,667 & 0,1 & 0,067 & 0,025 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица обратносимметрична, но не транзитивна. В частности, $a_{34}a_{46} \neq a_{36}$. Действительно,

$$a_{34}a_{46} = 0.5 \cdot 40 = 20 \neq a_{36} = 15 .$$

В связи с этим непосредственное использование матрицы $A$ для оценивания вектора $w$ невозможно.

Проведем процедуру коррекции. Первая итерация.

В соответствии с (6), (7) вычислим

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0,182 & 0,085 & 0,039 & 0,155 & 1,533 \\ 5,504 & 1 & 0,47 & 0,215 & 0,853 & 8,436 \\ 11,728 & 2,13 & 1 & 0,459 & 1,817 & 17,973 \\ 25,544 & 4,641 & 2,178 & 1 & 3,957 & 39,144 \\ 6,455 & 1,173 & 0,55 & 0,253 & 1 & 9,891 \\ 0,652 & 0,119 & 0,056 & 0,026 & 0,101 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица существенно более согласована, нежели исходная. В самом деле, для той же тройки элементов имеем

$$a_{34}a_{46} = 0,459 \cdot 39,144 = 17,967 \approx a_{36} = 17,973 .$$

Выполним еще одну итерацию коррекции, в результате которой получим

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 0,182 & 0,085 & 0,039 & 0,155 & 1,533 \\ 5,505 & 1 & 0,469 & 0,215 & 0,853 & 8,436 \\ 11,726 & 2,13 & 1 & 0,459 & 1,817 & 17,971 \\ 25,543 & 4,64 & 2,178 & 1 & 3,957 & 39,147 \\ 6,455 & 1,173 & 0,55 & 0,253 & 1 & 9,892 \\ 0,652 & 0,119 & 0,056 & 0,026 & 0,101 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица – практически согласована. В частности,

$$a_{34}a_{46} = a_{36} = 17,971 .$$

Процедура коррекции завершена.

С целью исследования зависимости скорости сходимости процедуры коррекции от размерности матрицы и уровня отклонения ее элементов от согласованной проводился вычислительный эксперимент, организованный следующим образом. Задавались исходные согласованные матрицы попарных сравнений размерности $5\times5$, $10\times10$, $15\times15$, $20\times20$, $30\times30$. Далее осуществлялось их искажение путем добавления к случайно выбранным элементам этих матриц нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием, равным единице, и варьируемой дисперсией. Затем полученные матрицы согласовывались с использованием описанной процедуры коррекции. Для выбранной размерности матрицы и величины дисперсии искажения ее элементов эксперимент повторялся несколько раз. В результате были построены графики зависимости среднего числа итераций от размерности матрицы и дисперсии искажения, приведенные на рис. 1.

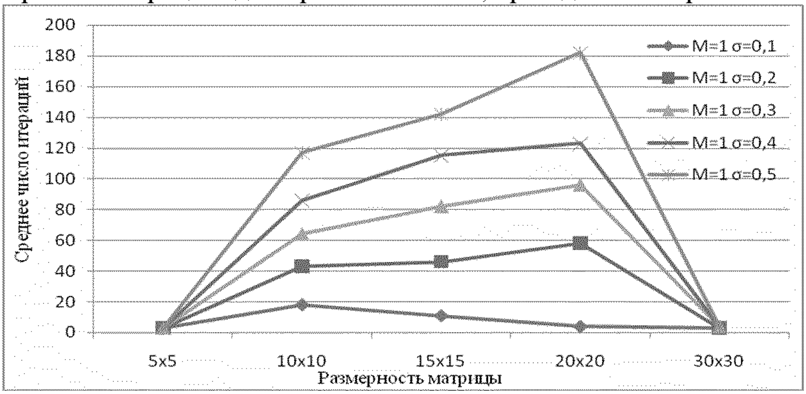


Рис. 1. Зависимость среднего числа итераций в процедуре согласования от размерности матрицы и дисперсии рассогласования

Анализ этих графиков позволяет сделать следующие выводы.

1. Требуемое для согласования число итераций, естественно, растет с увеличением дисперсии рассогласования элементов матрицы.

2. Полученная в эксперименте зависимость числа итераций от размерности задачи не тривиальна. Оказалось, что с увеличением размерности это число сначала растет, а затем снижается. Правдоподобное объяснение этому феномену таково. На скорость сходимости процедуры влияют два фактора. Первый – число элементов матрицы, пропорциональное $n^2$ и ухудшающее сходимость. Второй – число связей между элементами матрицы, обеспечивающих ее транзитивность, которое пропорционально $n^3$ и улучшает сходимость. В реальном эксперименте с ростом $n$ вначале сильнее действует первый фактор, а затем - второй.

**Выводы.** Таким образом, проведена оценка скорости сходимости процедуры корректировки, получена процедура согласования реальных матриц попарных сравнений, обеспечивающая корректность применения метода анализа иерархий.


**Список литературы:** 1. *Раскин Л.Г.* Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / *Л.Г. Раскин, О.В. Серая.* –Х.: Парус, 2008. - 354 с.