

*И.А. БАГМУТ*, ассистент кафедры СПУ НТУ «ХПИ»

## **НАБЛЮДАЕМОСТЬ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНЕРЦИАЛЬНОГО БЛОКА В ИНТЕГРИРОВАННОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ**

Отримано нову модель помилок інерціальної навігації, що відрізняється від відомих більшою спільністю. На основі даної моделі проведено дослідження спостережуваності інструментальних погрешностей інерціального блоку в інтегрованій інерціально-супутниковій навігаційній системі.

The new model of errors of the inertial navigation, distinguished from known is obtained by the greater generality. On the basis of the given model research of an observability of instrumental errors of the inertial unit in the integrated inertial - satellite navigational is conducted.

**Постановка проблемы.** Наблюдаемость является фундаментальным понятием теории идентификации состояния динамических систем, характеризующая возможность оценки переменных состояния по результатам измерения выхода системы [1]. Поэтому для построения эффективных алгоритмов оценивания инструментальных погрешностей (ИП) инерциального блока (ИБ) в интегрированной инерциально-спутниковой навигационной системе (ИИСНС) необходимо провести анализ наблюдаемости системы в целом и инструментальных погрешностей ИБ в частности. Наблюдаемость динамических систем, к которым относятся навигационные системы воздушных летательных аппаратов (ВЛА), зависит в частности от маневрирования ВЛА. В этих условиях представляет практический интерес проанализировать наблюдаемость ИП инерциального блока в ИИСНС при различных маневрах ВЛА.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Аналогичная проблема рассмотрена в [1, 2, 3]. Однако в этих работах при анализе наблюдаемости используются другие модели ошибок инерциальной навигации, также не исследована наблюдаемость масштабных коэффициентов (МК) и углов несоосности инерциальных датчиков (ИД).

**Цель и постановка задачи.** Целью данной работы является получение модели ошибок инерциальной навигации, и проведение на ее основе анализа наблюдаемости инструментальных погрешностей блока инерциальных датчиков в ИИСНС при различных маневрах воздушного летательного аппарата.

**Изложение материала.** Для анализа наблюдаемости инструментальных погрешностей примем сферическую модель Земли. Следуя [4], уравнения ошибок инерциальной навигации получим путем варьирования уравнения алгоритма идеальной работы БИНС [5] по компонентам вектора состояния инерциальной навигационной системы и измерениям инерциальных датчиков. Вывод модели ошибок осуществлен в самых общих условиях движения объекта.

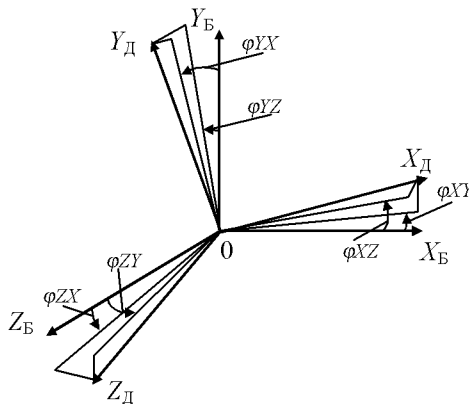
При выводе уравнений ошибок используются следующие системы координат (СК) [6, 7]:

- Географическая криволинейная СК, включающая географическую долготу, широту  $\varphi$  и высоту  $h$  ВЛА над поверхностью земного эллипсоида. Вектор состояния ВЛА формируется из координат  $(\varphi, \lambda, H)$  и трех составляющих вектора относительной скорости  $\vec{v} = \text{col}(v_N, v_H, v_E)$  в проекциях на оси географической топоцентрической декартовой СК.

- Географическая декартова СК с осями  $N, H, E$  (сопровождающий трехгранник), в дальнейшем обозначаемая символом  $\{X_N\}$ , вершина которой совпадает с точкой местоположения ВЛА. В данной СК ось  $N$  направлена на север, ось  $H$  – вдоль географической вертикали "вверх" и ось  $E$  – на восток.

- Связанная с ВЛА декартова базовая система координат (БСК)  $\{X_B\}$  с началом в его центре масс, с осью  $X$  направленной по продольной оси ВЛА, осью  $Y$  лежащей в плоскости симметрии ВЛА и направленной "вверх", осью  $Z$  дополняющей СК до правой. Ориентация базовой СК относительно осей географической декартовой СК задается путем трех последовательных поворотов по углам курса  $\psi$ , тангажа  $\theta$  и крена  $\gamma$ .

- Системы координат, связанные с осями чувствительности инерциальных датчиков –  $X_d, Y_d, Z_d$ . Начало данных систем отсчета совпадает с началом отсчета БСК. Оси этих СК могут совпадать с одноименными осями БСК, однако, как правило, имеет место некоторое рассогласование осей.



Ориентация осей чувствительности ИД относительно осей БСК

Данное рассогласование задается шестью углами  $\varphi_{ij}$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$ ,  $j \in \{X, Y, Z\}$ ,  $i \neq j$ , где  $i$  указывает на оси, между которыми есть рассогласование,  $j$  обозначает ось поворота, соответствующую данному углу рассогласования. Для гироскопов (ГС) данные углы будем обозначать  $\omega_{XY}$ ,  $\omega_{XZ}$  ...

а для акселерометров (АК) –  $aXY$ ,  $aXZ$  ....

Модели ошибок измерений гироскопов зададим следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\omega_X &= \Delta\omega_X - \omega_X \cdot \delta k\omega_X - \omega_Z \cdot \omega_{XY} + \omega_Y \cdot \omega_{XZ}, \\ \delta\omega_Y &= \Delta\omega_Y - \omega_Y \cdot \delta k\omega_Y + \omega_Z \cdot \omega_{YX} - \omega_X \cdot \omega_{YZ}, \\ \delta\omega_Z &= \Delta\omega_Z - \omega_Z \cdot \delta k\omega_Z - \omega_Y \cdot \omega_{ZX} + \omega_X \cdot \omega_{ZY}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $\omega_X$ ,  $\omega_Y$ ,  $\omega_Z$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения ВЛА  $\omega$  на оси БСК;  $\delta\omega_X$ ,  $\delta\omega_Y$ ,  $\delta\omega_Z$  – проекции ошибок измерения этого вектора на те же оси;  $\Delta\omega_X$ ,  $\Delta\omega_Y$ ,  $\Delta\omega_Z$  – систематические дрейфы ГС;  $\delta k\omega_X$ ,  $\delta k\omega_Y$ ,  $\delta k\omega_Z$  – погрешности МК гироскопов.

**Аналогичным образом зададим модели ошибок измерений АК:**

$$\begin{aligned}\delta a_X &= \Delta a_X - a_X \cdot \delta ka_X - a_Z \cdot a_{XY} + a_Y \cdot a_{XZ}, \\ \delta a_Y &= \Delta a_Y - a_Y \cdot \delta ka_Y + a_Z \cdot a_{YX} - a_X \cdot a_{YZ}, \\ \delta a_Z &= \Delta a_Z - a_Z \cdot \delta ka_Z - a_Y \cdot a_{ZX} + a_X \cdot a_{ZY},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $a_X$ ,  $a_Y$ ,  $a_Z$  – проекции вектора кажущегося ускорения ВЛА  $\bar{a}$  на оси БСК;  $\delta a_X$ ,  $\delta a_Y$ ,  $\delta a_Z$  – проекции ошибки измерения вектора  $\bar{a}$  на те же оси;  $\Delta a_X$ ,  $\Delta a_Y$ ,  $\Delta a_Z$  – систематические смещения нулей АК;  $\delta ka_X$ ,  $\delta ka_Y$ ,  $\delta ka_Z$  – погрешности МК акселерометров.

Считаем, что входящие в (1), (2) ИП являются константами, и реализуются в запуске случайным образом в соответствии с равномерным законом распределения из известного диапазона:  $\Delta\omega_i \in [-\Delta\omega_{\max}; \Delta\omega_{\max}]$ ,  $\delta k\omega_i \in [-\delta k\omega_{\max}; \delta k\omega_{\max}]$ ,  $\omega_{ij} \in [-\bar{\omega}_{\max}; \bar{\omega}_{\max}]$ ,  $\Delta a_i \in [-\Delta a_{\max}; \Delta a_{\max}]$ ,  $\delta ka_i \in [-\delta ka_{\max}; \delta ka_{\max}]$ ,  $a_{ij} \in [-\alpha_{\max}; \alpha_{\max}]$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$ ,  $j \in \{X, Y, Z\}$ ,  $i \neq j$ .

При условии, что модель Земли представляет собой сфероид, уравнения для набора навигационных параметров имеют вид [6, 7]:

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{R \cdot \cos \varphi}, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R}, \quad (4)$$

$$\dot{h} = v_H, \quad (5)$$

$$\dot{v}_N = a_N + g_N + v_H \cdot (\Omega_E + \omega_E) - v_E \cdot (\Omega_H + \omega_H), \quad (6)$$

$$\dot{v}_H = a_H + g_H + v_E \cdot (\Omega_N + \omega_N) - v_N \cdot (\Omega_E + \omega_E), \quad (7)$$

$$\dot{v}_E = a_E + g_E + v_N \cdot (\Omega_H + \omega_H) - v_H \cdot (\Omega_N + \omega_N), \quad (8)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\omega_Z \cdot \sin \gamma - \omega_Y \cdot \cos \gamma) - \operatorname{tg} \theta \cdot (\omega_E \cdot \sin \psi + \omega_N \cdot \cos \psi) + \omega_H, \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = \omega_Y \cdot \sin \gamma + \omega_Z \cdot \cos \gamma + \omega_N \cdot \sin \psi - \omega_E \cdot \cos \psi, \quad (10)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_X + tg\theta \cdot (\omega_Z \cdot \sin \gamma - \omega_Y \cdot \cos \gamma) - \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\omega_E \cdot \sin \psi + \omega_N \cdot \cos \psi), \quad (11)$$

где  $R = R_0 + h$ ,  $R_0$  – радиус земного сфероида;  $v_N$ ,  $v_H$ ,  $v_E$  – северная, высотная и восточная составляющие вектора относительной скорости ВЛА  $\bar{v}_{\{X_N\}}$  в базисе СК  $\{X_N\}$ ;  $a_N$ ,  $a_H$ ,  $a_E$  – северная, высотная и восточная составляющие вектора кажущегося ускорения ВЛА  $\bar{a}_{\{X_N\}}$ :

$$\bar{a}_{\{X_N\}} = A^T \cdot \bar{a}, \quad (12)$$

$A$  – матрица поворота от географической декартовой системы координат к СК  $\{X_B\}$ :

$$A = A_Y \cdot A_\theta \cdot A_\psi, \quad (13)$$

$$A_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$g_N$ ,  $g_H$ ,  $g_E$  – проекции вектора ускорения силы тяжести Земли  $\bar{g}_{\{X_N\}}$  на оси СК  $\{X_N\}$  [7]:

$$g_N = 0, \quad g_H = -g_{\mathcal{O}} \cdot \frac{R_0^2}{R^2}, \quad g_E = 0, \quad (17)$$

$g_{\mathcal{O}} = 9,78049$  м/с<sup>2</sup> [7];  $\Omega_N = \Omega \cdot \cos \varphi$ ,  $\Omega_H = \Omega \cdot \sin \varphi$ ,  $\Omega_E = 0$  – проекции вектора угловой скорости вращения Земли  $\bar{\Omega}$  на оси СК  $\{X_N\}$ ,  $\Omega = 7292115 \cdot 10^{-11}$  рад/с [7];  $\omega_N$ ,  $\omega_H$ ,  $\omega_E$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости сопровождающего трехгранника на собственные оси:

$$\omega_N = \Omega_N + \frac{v_E}{R}, \quad \omega_H = \Omega_H + \frac{v_E}{R} \cdot tg\varphi, \quad \omega_E = -\frac{v_N}{R}. \quad (18)$$

Поварьировав уравнения (3)-(11) с учетом (12)-(18) по переменным  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $h$ ,  $v_N$ ,  $v_H$ ,  $v_E$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  а также по измерениям АК и ГС, получим модель ошибок инерциальной навигации, записанную в потребительских параметрах:

$$\delta\dot{\lambda} = -\frac{v_E \cdot \sin\varphi}{R \cdot \cos^2\varphi} \cdot \delta\varphi - \frac{v_E}{R^2 \cdot \cos\varphi} \cdot \delta h + \frac{1}{R \cdot \cos\varphi} \cdot \delta v_E, \quad (19)$$

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R^2} \cdot \delta h + \frac{1}{R} \cdot \delta v_N, \quad (20)$$

$$\delta\dot{h} = \delta v_H, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{v}_N = & -\left(2 \cdot v_E \cdot \Omega_N + \frac{v_E^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}\varphi)^2}{R}\right) \cdot \delta\varphi + \frac{(v_N \cdot v_H + v_E^2 \cdot \operatorname{tg}\varphi)}{R^2} \cdot \delta h - \\ & -\frac{v_H}{R} \cdot \delta v_N - \frac{v_N}{R} \cdot \delta v_H - 2 \cdot \left(\Omega_H + \frac{v_E \cdot \operatorname{tg}\varphi}{R}\right) \cdot \delta v_E + (-a_X \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi + \\ & + a_Y \cdot (\cos\gamma \sin\theta \sin\psi - \sin\gamma \cos\psi) - \\ & - a_Z \cdot (\sin\gamma \sin\theta \sin\psi + \cos\gamma \cos\psi)) \cdot \delta\psi + \\ & + (-a_X \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi - a_Y \cdot \cos\gamma \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi + a_Z \cdot \sin\gamma \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi) \cdot \delta\theta + \\ & + (a_Y \cdot (\sin\gamma \sin\theta \cos\psi - \cos\gamma \sin\psi) + \\ & + a_Z \cdot (\cos\gamma \sin\theta \cos\psi + \sin\gamma \sin\psi)) \cdot \delta\gamma + \\ & + (\cos\theta \cdot \cos\psi) \cdot \delta a_X - (\cos\gamma \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi + \sin\gamma \cdot \sin\psi) \cdot \delta a_Y + \\ & + (\sin\gamma \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi - \cos\gamma \cdot \sin\psi) \cdot \delta a_Z \\ \delta\dot{v}_H = & -2 \cdot v_E \cdot \Omega_H \cdot \delta\varphi + \left(\frac{2 \cdot g_{\ominus 0} \cdot R_0^2}{R^3} - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R^2}\right) \cdot \delta h + \frac{2 \cdot v_N}{R} \cdot \delta v_N + \\ & + 2 \cdot \left(\Omega_N + \frac{v_E}{R}\right) \cdot \delta v_E + (a_X \cdot \cos\theta - a_Y \cdot \cos\gamma \cdot \sin\theta + a_Z \cdot \sin\gamma \cdot \sin\theta) \cdot \delta\theta - \\ & - (a_Y \cdot \sin\gamma \cdot \cos\theta + a_Z \cdot \cos\gamma \cdot \cos\theta) \cdot \delta\gamma + \sin\theta \cdot \delta a_X + \cos\gamma \cdot \cos\theta \cdot \delta a_Y - \\ & - \sin\gamma \cdot \cos\theta \cdot \delta a_Z \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\delta \dot{v}_E = & \left( 2 \cdot (v_N \cdot \Omega_N + v_H \cdot \Omega_H) + \frac{v_N \cdot v_E \cdot (1 + \operatorname{tg} \varphi)^2}{R} \right) \cdot \delta \varphi + \\
& + \frac{(v_H \cdot v_E - v_N \cdot v_E \cdot \operatorname{tg} \varphi)}{R^2} \cdot \delta h + \left( 2 \cdot \Omega_H + \frac{v_E \cdot \operatorname{tg} \varphi}{R} \right) \cdot \delta v_N - \\
& - \left( 2 \cdot \Omega_N + \frac{v_E}{R} \right) \cdot \delta v_H + \left( \frac{v_N \cdot \operatorname{tg} \varphi - v_H}{R} \right) \cdot \delta v_E + (a_X \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi - \\
& - a_Y \cdot (\cos \gamma \sin \theta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi) + a_Z \cdot (\sin \gamma \sin \theta \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi)) \cdot \delta \psi + \\
& + (-a_X \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi - a_Y \cdot \cos \gamma \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi + a_Z \cdot \sin \gamma \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi) \cdot \delta \theta + \\
& + (a_Y \cdot (\sin \gamma \sin \theta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi) + a_Z \cdot (\cos \gamma \sin \theta \sin \psi - \sin \gamma \cos \psi)) \cdot \delta \gamma + \\
& + (\cos \theta \cdot \sin \psi) \cdot \delta a_X - (\sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \theta \sin \psi) \cdot \delta a_Y + \\
& + (\sin \gamma \sin \theta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi) \cdot \delta a_Z
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\psi} = & \left( \Omega_N + \Omega_H \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \cos \psi + \frac{v_E \cdot (1 + \operatorname{tg} \varphi)^2}{R} \right) \cdot \delta \varphi + \\
& + \frac{(v_E \cdot (\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \psi - \operatorname{tg} \varphi) - v_N \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \psi)}{R^2} \cdot \delta h + \left( \frac{\operatorname{tg} \theta \cdot \sin \psi}{R} \right) \cdot \delta v_N - \\
& - \left( \frac{\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \psi}{R} \right) \cdot \delta v_E + \operatorname{tg} \theta \cdot \left( \frac{v_N}{R} \cdot \cos \psi + \left( \Omega_N + \frac{v_E}{R} \right) \cdot \sin \psi \right) \cdot \delta \psi +
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( \sin \theta \cdot (\omega_Z \sin \gamma - \omega_Y \cos \gamma) + \frac{v_N}{R} \cdot \sin \psi - \left( \Omega_N + \frac{v_E}{R} \right) \cdot \cos \psi \right) \cdot \delta \theta + \\
& + \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\omega_Z \cdot \cos \gamma + \omega_Y \cdot \sin \gamma) \cdot \delta \gamma - \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \cdot \delta \omega_Y + \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \cdot \delta \omega_Z \\
\delta \dot{\theta} = & (-\Omega_H \cdot \sin \psi) \cdot \delta \varphi - \frac{v_N \cdot \cos \psi + v_E \cdot \sin \psi}{R^2} \cdot \delta h + \frac{\cos \psi}{R} \cdot \delta v_N + \\
& + \frac{\sin \psi}{R} \cdot \delta v_E + \left( -\frac{v_N}{R} \cdot \sin \psi + \left( \Omega_N + \frac{v_E}{R} \right) \cdot \cos \psi \right) \cdot \delta \psi + \\
& + (\omega_Y \cdot \cos \gamma - \omega_Z \cdot \sin \gamma) \cdot \delta \gamma + \sin \gamma \cdot \delta \omega_Y + \cos \gamma \cdot \delta \omega_Z
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\gamma} = & \frac{\Omega_H \cdot \cos\psi}{\cos\theta} \cdot \delta\varphi + \frac{(v_E \cdot \cos\psi - v_N \cdot \sin\psi)}{R^2 \cdot \cos\theta} \cdot \delta h + \frac{\sin\psi}{R \cdot \cos\theta} \cdot \delta v_N - \\
& - \frac{\cos\psi}{R \cdot \cos\theta} \cdot \delta v_E - \frac{1}{\cos\theta} \cdot \left( \frac{v_N}{R} \cdot \cos\psi + \left( \Omega_N + \frac{v_E}{R} \right) \cdot \sin\psi \right) \cdot \delta\psi + \\
& + \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \left( \omega_Z \sin\gamma - \omega_Y \cos\gamma + \sin\theta \cdot \left( \frac{v_N}{R} \cdot \sin\psi - \left( \Omega_N + \frac{v_E}{R} \right) \cdot \cos\psi \right) \right) \cdot \delta\theta + \\
& + \operatorname{tg}\theta \cdot (\omega_Z \cdot \cos\gamma + \omega_Y \cdot \sin\gamma) \cdot \delta\gamma + \delta\omega_X - \operatorname{tg}\theta \cdot \cos\gamma \cdot \delta\omega_Y + \operatorname{tg}\theta \cdot \sin\gamma \cdot \delta\omega_Z
\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, уравнения (19)-(27) представляют собой линеаризованную нестационарную модель ошибок инерциальной навигации, справедливую для любого вида движения объекта. Адекватность полученной модели подтверждается путем сопоставления результатов интегрирования (19)-(27) с фактической ошибкой навигации, получаемой интегрированием возмущенных и невозмущенных уравнений (3)-(11).

*Наблюдаемость инструментальных погрешностей.* Следуя [8] формализуем задачу наблюдения следующим образом. Рассматривается линейная система, функционирование которой подчиняется уравнениям:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= A(t) \cdot \bar{x}, \\
z &= H(t) \cdot \bar{x},
\end{aligned} \tag{28}$$

где  $\bar{x}$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы,  $A(t)$  – матрица динамики системы размера  $n \times n$ ,  $z$  –  $m$ -мерный вектор измерений,  $H(t)$  – матрица связи (измерения) размера  $m \times n$ . Необходимо определить вектор состояния системы  $\bar{x}$ , на основе измерения  $z$ . Чтобы оценить возможность определения вектора состояния, нужно исследовать систему на наблюдаемость. Для этого, как правило, используют критерии, основанные на построении и анализе так называемой матрицы наблюдаемости системы [9]: критерий Калмана в случае линейной стационарной системы, локальный и интегральный критерии для линейной нестационарной системы.

В ИИСНС комплексирование информации реализуется на основе фильтра Калмана (ФК) [5]. При инвариантной схеме построения алгоритма комплексирования, измерения для ФК представляют собой ошибки определения координат и скорости, полученные как разность между значениями, вычисленными на основе данных СНС и данных ИНС [5].

Исследование системы на наблюдаемость компонент ее вектора состояния проводится в идеальных условиях, т.е. при отсутствии шумов и неизвестных возмущающих воздействий [9]. Учитывая выше сказанное, задачу анализа наблюдаемости инструментальных погрешностей инерциального блока в ИИСНС сформулируем следующим образом. Необходимо исследовать на наблюдаемость систему уравнений (28), для которых входящие в нее величины имеют следующий смысл:

$$\bar{x} = \left( \delta\lambda, \delta\varphi, \delta h, \delta v_{\{X,N\}}^T, \delta\psi, \delta\theta, \delta\gamma, \Delta\omega, \Delta a_i, \delta k\omega_i, \delta k a_i, \omega_{ij}, a_{ij} \right)^T,$$

$$i \in \{X, Y, Z\}, j \in \{X, Y, Z\}, i \neq j,$$

$$\Delta\dot{\omega}_i = 0, \Delta\dot{a}_i = 0, \delta k\dot{\omega}_i = 0, \delta k\dot{a}_i = 0, \dot{\omega}_{ij} = 0, \dot{a}_{ij} = 0, \quad (29)$$

$$H = \begin{bmatrix} E_{(6 \times 6)} & 0_{(6 \times 27)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{z} = (\delta\lambda, \delta\varphi, \delta h, \delta v_N, \delta v_H, \delta v_E)^T.$$

В данном случае матрица динамики  $A(t)$  имеет размер  $33 \times 33$ . Первые девять строк матрицы представляют собой соответствующие коэффициенты при компонентах вектора  $x$ , взятых из правых частей уравнений модели ошибок (19)-(27). Остальные 24 строки матрицы  $A(t)$  нулевые, т.к. рассматриваемые инструментальные погрешности считаются константами.

Проанализировать систему (28), с учетом выражений (29) на наблюдаемость с использованием указанных выше критериев в общем виде практически невозможно, т.к. система является нестационарной и чрезвычайно громоздкой. Однако так как в правые части уравнений (19)-(27) входят навигационные и динамические параметры движения ВЛА, следовательно, существует зависимость между влиянием на ошибки инерциальной навигации определенных инструментальных погрешностей и типом движения совершаемого ВЛА. В этом случае в зависимости от типа движения ВЛА некоторые ИП будут оказывать незначительное влияние на ошибки инерциальной навигации, и ими можно пренебречь. Это позволит упростить модель ошибок, адаптировав ее к условиям движения ВЛА.

Упростим модель ошибок инерциальной навигации и измерения векторов  $\delta a$  и  $\delta \omega$  для условий *стоянки ВЛА*. При выводе уравнений, не нарушая общности, примем, что  $\varphi = 0^\circ$ . Полученные модели ошибок будут использованы для анализа наблюдаемости инструментальных погрешностей.

Для *стоянки* полагаем  $v_N = 0$ ,  $v_H = 0$ ,  $v_E = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\bar{a} = \text{col}(0, a_Y, 0)$  и  $\bar{\omega} = \text{col}(\omega_X \approx 0, 0, \omega_Z \approx 0)$ . В этих условиях исходная модель ошибок (19)-(27) принимает вид:

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{1}{R} \cdot \delta v_E, \quad \delta\dot{\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \delta v_N, \quad \delta\dot{h} = \delta v_H, \quad (30)$$

$$\delta\dot{v}_N = -a_Y \cdot \cos\psi \cdot \delta\theta - a_Y \cdot \sin\psi \cdot \delta\gamma + \cos\psi \cdot \delta a_X - \sin\psi \cdot \delta a_Z, \quad (31)$$

$$\delta\dot{v}_H = \left( \frac{2 \cdot g \sin\theta \cdot R_0^2}{R^3} \right) \cdot \delta h + 2 \cdot \Omega \cdot \delta v_E + \delta a_Y, \quad (32)$$

$$\delta\dot{v}_E = -2 \cdot \Omega \cdot \delta v_H - a_Y \cdot \sin\psi \cdot \delta\theta + a_Y \cdot \cos\psi \cdot \delta\gamma + \sin\psi \cdot \delta a_X + \cos\psi \cdot \delta a_Z, \quad (33)$$

$$\delta\dot{\psi} = \Omega \cdot \delta\varphi + \Omega \cdot \cos\psi \cdot \delta\theta + \omega_Z \cdot \delta\gamma - \delta\omega_Y, \quad (34)$$



$$\delta\dot{\theta} = \frac{\cos\psi}{R} \cdot \delta v_N + \frac{\sin\psi}{R} \cdot \delta v_E + \Omega \cdot \cos\psi \cdot \delta\psi + \delta\omega_Z, \quad (35)$$

$$\delta\dot{\gamma} = \frac{\sin\psi}{R} \cdot \delta v_N - \frac{\cos\psi}{R} \cdot \delta v_E - \Omega \cdot \sin\psi \cdot \delta\psi + \delta\omega_X, \quad (36)$$

а модели ошибок измерения инерциальных датчиками станут такими:

$$\delta a_X = \Delta a_X + a_Y \cdot a_{XZ}, \quad \delta a_Y = \Delta a_Y - a_Y \cdot \delta k a_Y, \quad \delta a_Z = \Delta a_Z - a_Y \cdot a_{ZX}, \quad (37)$$

$$\delta\omega_X = \Delta\omega_X, \quad \delta\omega_Y = \Delta\omega_Y, \quad \delta\omega_Z = \Delta\omega_Z. \quad (38)$$

Рассмотрим наблюдаемость ошибок измерения вектора угловой скорости  $\delta\omega$  и кажущегося ускорения  $\delta a$  ВЛА. Для анализа наблюдаемости системы (30)-(36) дополним следующими уравнениями:

$$\delta\dot{\omega}_X = 0, \quad \delta\dot{\omega}_Y = 0, \quad \delta\dot{\omega}_Z = 0, \quad \delta\dot{a}_X = 0, \quad \delta\dot{a}_Y = 0, \quad \delta\dot{a}_Z = 0. \quad (39)$$

Система, задаваемая уравнениями (28), (29), (30)-(36) и (39) стационарная. Порядок системы  $n = 15$ . На основании критерия Калмана система является не вполне наблюдаемой, т.к.  $rank M = 12 < n = 15$ , где  $M$  – матрица наблюдаемости, составленная на базе уравнений данной системы.

С целью выявления наблюдаемых и ненаблюдаемых компонент системы, было проведено компьютерное моделирование функционирования навигационной системы. В качестве наблюдающего устройства использовался ФК, в основу которого положена разработанная модель ошибок. В вектор состояния были включены все 6 ошибок измерений ИД.

При моделировании, были приняты следующие максимальные значения инструментальных погрешностей, соответствующие ИД средней точности:

- дрейф гироскопов  $\Delta\omega_i = 1^\circ / \text{час}$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$ ;
- смещение нулей акселерометров  $\Delta a_i = 0,001 \text{ м/с}^2$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$ ;
- погрешности МК  $\delta k a_i = \delta k a_i = 0,01 \%$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$ ;
- углы несоосности осей чувствительности ИД и осей базовой СК

$$\omega_{ij} = a_{ij} = 20 \text{ [угл.сек.]}, \quad i \in \{X, Y, Z\}, \quad j \in \{X, Y, Z\}, \quad i \neq j.$$

На основе результатов моделирования можно сделать следующие выводы. При наличии всех 6 ошибок измерения ИД в векторе состояния, независимо от угла курса наблюдаемыми являются его 8 компонент: координатные и скоростные ошибки, а также ошибки  $\delta a_Y$  и  $\delta\omega_Y$ . При этом ошибка  $\delta a_Y$  является хорошо наблюдаемой, а  $\delta\omega_Y$  – слабо наблюдаемой. (скорость оценивания ошибки  $\delta a_Y$  оказалась на несколько порядков выше скорости оценивания ошибки  $\delta\omega_Y$ ). Понятия “хорошо наблюдаемая координата”, “слабо наблюдаемая координата” вектора состояния исследуемой системы рассмотрены в [1, 8]. Остальные компоненты являются ненаблюдаемыми или наблюдаемыми в линейных комбинациях. В случаях, когда  $\psi \approx i \cdot \pi$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ )

также наблюдаемой будет ошибка  $\delta\omega_X$ , а при  $\psi \approx \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) – ошибка  $\delta\omega_Z$ .

Рассмотрим теперь наблюдаемость инструментальных погрешностей. Наблюдаемыми могут быть только те ИП, которые влияют на ошибки измерения векторов  $a$  и  $\omega$ , т.е. инструментальные погрешности, входящие в уравнения (37)-(38). В общем случае ни одна из таких инструментальных ошибок не будет наблюдаема. Инструментальные погрешности  $\Delta a_Y$  и  $\delta k a_Y$ , линейная комбинация которых представляет собой наблюдаемую ошибку  $\delta a_Y$ , будут входить в правую часть только одного из уравнений системы (30)-(36), с коэффициентами  $1$  и  $-a_Y \approx -g_{\ominus 0} \equiv \text{const}$  соответственно. Поэтому в данном случае, возможно, оценить лишь линейную комбинацию ИП  $\Delta a_Y$  и  $\delta k a_Y$ , тогда как отдельно оценить указанные погрешности невозможно. Аналогично и для ИП  $\Delta \omega_Y$  и  $\delta k \omega_Y$ , входящих в наблюдаемую ошибку  $\delta \omega_Y$ . Остальные инструментальные погрешности являются составляющими ненаблюдаемых проекций ошибок  $\delta \omega$ ,  $\delta a$  и, следовательно, тоже не будут наблюдаться. В частном случае, при условии малости одной из погрешностей в паре  $\Delta a_Y$  и  $\delta k a_Y$  или в паре  $\Delta \omega_Y$  и  $\delta k \omega_Y$ , будет наблюдаться другая ИП из данной пары. Также при  $\psi \approx i \cdot \pi$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) наблюдаемой будет погрешность  $\Delta \omega_X$ , а при  $\psi \approx \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) будет наблюдаться  $\Delta \omega_Z$ .

Аналогичным образом были получены и проанализированы на наблюдаемость упрощенные модели ошибок и для других типовых движений ВЛА. Для получения более общей картины влияния ИП на ошибки инерциальной навигации также были рассмотрим одноосные повороты инерциального блока НС, характерные для процедуры паспортизации ИД в лабораторных условиях.

Результаты исследования на наблюдаемость представлены ниже в таблице. Приняты следующие обозначения:

- символ “+” означает хорошую наблюдаемость;
- символ “\*” означает слабую наблюдаемость;
- символ “v” означает наблюдаемость в линейной комбинации;
- символ “-” отсутствие наблюдаемости.

Значения в каждой колонке соответствуют одному из маневров:

1. неподвижное состояние с малыми углами тангажа и крена.
2. Повороты НС по углу курса, при малых углах тангажа и крена.
3. Повороты навигационной системы по углу тангажа, при малых углах курса и крена.
4. Повороты НС по углу крена, при малых углах курса и тангажа.

5. Равномерное прямолинейное движение ВЛА.
6. Прямолинейное равноускоренное движение ВЛА.
7. Поворот ВЛА по углу курса при малых углах тангажа и крена.
8. Набор высоты ВЛА.
9. Равномерное прямолинейное движение ВЛА с маневром по углу крена.

Наблюдаемость ошибок измерений инерциальных датчиков, а также их инструментальных погрешностей в зависимости от типа тестового движения

ИП	Тестовое движение								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta\omega_x$	-	+	v	v	-	+	+	+	v
$\delta\omega_y$	*	*	*	*	*	+	+	+	*
$\delta\omega_z$	-	+	v	v	-	+	+	+	v
$\delta a_x$	-	+	+	v	-	+	+	+	v
$\delta a_y$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\delta a_z$	-	+	v	+	-	-	+	v	+
$\Delta\omega_x$	-	v	v	v	-	+	v	v	v
$\Delta\omega_y$	*	v	v	v	*	+	v	v	v
$\Delta\omega_z$	-	v	v	v	-	+	v	v	v
$\Delta a_x$	-	v	v	v	-	v	v	v	v
$\Delta a_y$	v	v	v	v	v	v	v	v	v
$\Delta a_z$	-	v	v	v	-	-	v	v	v
$\delta k\omega_x$	-	-	-	v	-	-	-	-	v
$\delta k\omega_y$	-	v	-	-	-	-	v	-	-
$\delta k\omega_z$	-	-	v	-	-	-	-	v	-
$\delta k a_x$	-	-	v	-	-	v	v	v	-
$\delta k a_y$	v	v	v	v	v	v	v	v	v
$\delta k a_z$	-	-	-	v	-	-	v	-	v
$\omega_{XY}$	-	-	v	-	-	-	-	v	-
$\omega_{XZ}$	-	v	-	-	-	-	v	-	-
$\omega_{YX}$	-	-	v	-	-	-	-	v	-
$\omega_{YZ}$	-	-	-	v	-	-	-	-	v
$\omega_{ZX}$	-	v	-	-	-	-	v	-	-
$\omega_{ZY}$	-	-	-	v	-	-	-	-	v
ИП	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$a\overline{XY}$	-	-	-	v	-	-	v	-	v
$a\overline{XZ}$	-	v	v	v	-	v	v	v	v
$a\overline{YX}$	-	-	-	v	-	-	v	-	v
$a\overline{YZ}$	-	-	v	-	-	v	v	v	-
$a\overline{ZX}$	-	v	v	v	-	v	v	v	v
$a\overline{ZY}$	-	-	v	-	-	v	v	v	-

Как видно из таблицы, наиболее благоприятные условия для наблюдаемости и оценивания рассматриваемых погрешностей создают маневры с поворотом по углу курса – в этом случае наблюдаются все ошибки измерений ИД. Также хорошие условия создают маневры прямолинейного равноускоренного движения и набора высоты. Менее благоприятные условия создают стоянка и равномерное прямолинейное движение. При этом каждый маневр имеет свою специфику относительно влияния на наблюдаемость ИП. Например, при маневре по углу крена создаются благоприятные условия для оценивания смещения z-АК, а при наборе высоты – для оценивания смещения x-АК.

**Выводы.** Разработана новая модель ошибок инерциальной навигации. На основе данной модели проведено исследование наблюдаемости инструментальных погрешностей инерциального блока в ИИСНС. Полученные результаты можно использовать для формирования соответствующих рекомендаций по пилотированию с целью выполнения калибровки инерциальных датчиков.

**Список литературы:** 1. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Информационно-алгоритмические аспекты управления подвижными объектами.– Киев: Наук. думка, 2000.– 310 с. 2. *Кортунов В.И., Проскура Г.А.* Уравнения ошибок БИНС и анализ наблюдаемости // Системи обробки інформації: Зб. наукових праць.– Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2006.– №9(58).–С. 112-115. 3. *Кортунов В.И., Проскура Г.А.* Наблюдаемость и обнаруживаемость инструментальных ошибок БИНС // Авиационно-космическая техника и технология.– 2006– № 3 (29).– С. 31-38. 4. *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Кн. I. Автономные системы. Кн. II. Корректируемые системы.– М.: Наука, 1967. 5. *Степанов О.А.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации // Гироскопия и навигация.– 2002.– № 1 (36).– С. 23-45. 6. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / *О.Н. Анучин, Г.И. Емельянцева* / Под общей ред. чл.-кор. РАН *В. Г. Пешехонова.*– СПб., 1999. 7. *Бромберг П.В.* Теория инерциальных систем навигации.– М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.– 296 с. 8. *Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И.* Задача коррекции в инерциальной навигации.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.– 176 с. 9. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А.А. Красовского.*–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.– 712 с.

*Поступила в редколлегию 03.04.09*