УДК 62-52

А.И. РОГАЧЁВ, д. т. н., проф. НТУ «ХПИ» (г. Харьков),
Д.Н. ЦЯЦЬКА, студент НТУ «ХПИ» (г. Харьков)

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ УСТАНОВКИ ДЛЯ РАЗРЕЗАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ

В статті досліджується процес розрізання водорозчинних монокристалів. Проведено оптимізацію режиму розрізання по критеріям мінімізації амплітуди коливань, поперечних до площини різу нитки, та витрат енергії на реалізацію оптимального управління.

In article cutting process of water-soluble mono-crystals is explored. The optimization cutting conditions with the help criterions of minimization amplitude of transverse to the cutting plane oscillation of the thread and of expenditure electric power for the realization of optimal control is conducted.

В процессе разрезания водорастворимых монокристаллов вращающейся хлопчатобумажной нитью на поверхности реза могут возникать дефекты из-за отклонения нити от вертикального положения в плоскости, перпендикулярной к направлению реза, что связано с воздействием на нее различных возмущений. Это приводит к необходимости дополнительной шлифовки поверхности реза, снижающей выход готовой продукции. В связи с этим возникает задача оптимизации работы установки для порезки кристаллов с целью минимизации дефектов реза при минимизации энергозатрат, которая и рассматривается в данной статье.

Ранее в [1], [2] разработана математическая модель объекта управления, состоящего из режущей нити и самого кристалла. На основе исследования модели получены соотношения для оценки колебаний при поступательном движении нити, проведен анализ динамики модели всей системы автоматического управления и получены условия устойчивости замкнутой системы, что позволило разработать методику выбора оптимальных параметров системы по критерию запаса устойчивости на базе вариации времени запаздывания.

В данной статье исследуется задача погашения колебаний режущей нити в поперечном направлении по отношению к плоскости реза за минимальное время и при минимизации расхода энергии, затрачиваемой на соответствующее управление. Для этого предложено представить процесс порезки кристалла нитью в виде уравнения колебаний струны, закрепленной в двух точках [3]:

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, \ \left(0 \le x \le l;\ t \ge 0\right) \qquad (1)$$

где $a = \frac{T_0}{\rho}$, T_0 – постоянная силы натяжения нити, ρ – линейная плотность нити, t – время, x – текущая координата по длине нити, $Q(x,\ t)$ – функция отклонения нити в плоскости, перпендикулярной к плоскости реза. За точки «закрепления» нити A и B принимаются оси верхнего и нижнего роликов. Так как к нити прикладывать воздействие невозможно, то его нужно передавать через оси роликов, воздействуя на несущий кронштейн. Рассматривается случай, когда это воздействие $u(\tau)$ приложено с одной стороны, т.е. к оси верхнего ролика (точка A). Тогда если эту точку принять за начало координат x, то $x(B) = \ell$, а $x(A) = 0$.

Если ввести подстановку $\tau = at$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (0 \le x \le l; \tau = at; t \ge 0). \tag{2}$$

Предположим, что при $\tau = 0$ начальное состояние нити описывается следующими условиями:

$$Q(x,0) = Q_0(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau}(x,0) = \dot{Q}_0(x), \quad (0 \le x \le l). \tag{3}$$

Граничные условия будут иметь вид

$$Q(l,\tau) = 0, \quad Q(0,\tau) = u(\tau), \quad (\tau \ge 0). \tag{4}$$

Пусть затраты энергии на управление в каждый момент времени τ пропорциональны квадрату управляющего воздействия. Тогда за всё время успокоения нити $\tau = T$ эти затраты составят

$$q = \int_0^T u^2(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Задачу оптимального управления теперь можно поставить следующим образом: найти такое управление $u(\tau)$, приложенное к оси верхнего ролика, чтобы возникшие под воздействием внешних возмущений поперечные колебания нити полностью исчезли за минимально возможное время $\tau_{\text{мин}} = T$, причём затраты энергии q также должны быть минимальны.

Подобная задача решалась в работе [4] для общего случая колебательной системы с распределёнными параметрами. Используя результаты этой работы, найдём решение задачи для нашего объекта, считая пока нить неподвижной.

Решение уравнения (2) можно представить как сумму двух функций

$$Q(x,\tau) = Q_1(x,\tau) + Q_2(x,\tau), \tag{6}$$

где $Q_1(x,\tau)$ – это свободные колебания нити от ненулевых начальных условий, а $Q_2(x,\tau)$ – это вынужденные колебания от управления $u(\tau)$, которое и должно быть найдено. Введя для упрощения подстановку $y = \pi x / l$, запишем решение:

$$Q_1(y,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\tau+\frac{1}{k}b_k\sin k\tau\right)\sin ky, \tag{7}$$

$$Q_2(y,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k(\tau-t)\sin ky\,u(t)\,dt, \tag{8}$$

где $$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}Q_0(y)\sin ky\,dy,\quad (k=1,2,\ldots), \tag{9}$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dot{Q}_0(y)\sin ky\,dy,\quad (k=1,2,\ldots). \tag{10}$$

Потребуем, чтобы в конечный момент времени $\tau_{\text{мин}}=T$ было получено как нулевое распределение амплитуд колебаний нити, так и нулевое распределение их скоростей. Эти условия можно записать в виде

$$Q(y,T)=Q_1(y,T)+Q_2(y,T)=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}(y,T)=\frac{\partial Q_1}{\partial\tau}(y,T)+\frac{\partial Q_2}{\partial\tau}(y,T)=0. \tag{12}$$

Подставляя в (11), (12) выражения (7), (8) и выполняя операцию дифференцирования, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin ky\left[a_k\cos kT+\frac{1}{k}b_k\sin kT+\frac{2}{\pi}\int_0^{T}\sin k(T-t)u(t)\,dt\right]=0, \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin ky\left[-ka_k\sin kT+b_k\cos kT+\frac{2k}{\pi}\int_0^{T}\cos k(T-t)u(t)\,dt\right]=0. \tag{14}$$

Для выполнения условий (13), (14) необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты при $\sin ky$ в этих двух формулах для $k=1,2,\ldots$ были равны нулю. Отсюда получаем бесконечную систему равенств:

$$\frac{\pi}{2}a_k\cos kT+\frac{\pi}{2k}b_k\sin kT+\int_0^{T}u(t)\sin k(T-t)\,dt=0,\quad (k=1,2,\ldots), \tag{15}$$

$$-\frac{\pi}{2}a_k\sin kT+\frac{\pi}{2k}b_k\cos kT+\int_0^{T}u(t)\cos k(T-t)\,dt=0,\quad (k=1,2,\ldots). \tag{16}$$

С помощью алгебраических преобразований выражения (15), (16) можно привести к более простому виду

$$\int_0^{T}u(t)\sin kt\,dt=\frac{\pi}{2}a_k,\quad (k=1,2,\ldots), \tag{17}$$ $$\int_0^{T}u(t)\cos kt\,dt=-\frac{\pi}{2k}b_k,\quad (k=1,2,\ldots). \tag{18}$$

Найденная система равенств (17), (18) определяет условия полного успокоения нити, а задача нахождения соответствующего оптимального управления $u(t)$ эквивалентна задаче о разрешимости бесконечной проблемы моментов [4].

Прежде, чем переходить к поиску оптимального управления, определим нижнюю границу времени успокоения $\tau_{\text{мин}} = T$. Для этого воспользуемся следующими соображениями. Скорость распространения стоячей волны, вызванной каким-либо возмущением, при заданных свойствах нити является величиной неизменной. Если эта скорость равна a, а длина нити между роликами равна l, то время пробега этой волны от источника возмущения до конца нити и обратно $t = 2l/a$. С учётом введенных для упрощения подстановок $\tau = at$ и $y = \pi x/l$ в новых координатах $l = \pi$, а время пробега двойной длины нити в относительных единицах $\tau = 2\pi$. Очевидно, что эта величина и определяет нижний предел времени, необходимого для полного успокоения системы из произвольного начального состояния. Если в верхние пределы интегралов в формулах (17), (18) подставить $T = 2\pi$, то этим условиям будет удовлетворять множество искомых управлений

$$u(\tau) = C + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \sin k\tau - \frac{1}{k} b_k \cos k\tau\right), \qquad (19)$$

где C – произвольная постоянная.

Константу C выбираем из условия минимума потерь энергии на управление, определяемых в виде функционала (5). Найти константу C можно путём стандартной процедуры поиска экстремума функции. Для этого представим формулу (19) в виде

$$u(\tau) = C + u_1(\tau) \qquad (20)$$

и продифференцируем выражение (5) по переменной C.

$$\frac{\partial q}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}\int_0^T \left(C + u_1(\tau)\right)^2 d\tau = \frac{\partial}{\partial C}\left[C^2 T + 2C\int_0^T u_1(\tau)d\tau + \int_0^T u_1^2(\tau)d\tau\right]. \qquad (21)$$

Так как при $T = 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} u_1(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos k\tau + a_k \sin k\tau\right) = 0,$$

то из (21) вытекает, что минимум потерь энергии q будет иметь место при $C = 0$. Поэтому

$$u_{\text{опт}}(\tau) = u_1(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \sin k\tau - \frac{b_k}{k}\cos k\tau\right). \qquad (22)$$

Если теперь использовать выражения (9), (10), то $u_{\text{опт}}$ можно выразить через начальные распределения амплитуд нити $Q_0(y)$ и их скоростей $\dot{Q}_0(y)$:

$$u_{\text{опт}}(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{y}\dot{Q}_0(t)dt\right)\cos kydy\cos k\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}Q_0(y)\sin kydy\sin k\tau. \quad (23)$$

Найденное управление (23) минимизирует затраты энергии в соответствии с функционалом (5), обеспечивая минимальное время успокоения нити. И хотя такая минимизация ограничивает среднее количество использованной энергии на управление за время $T=2\pi$, однако на отдельных интервалах времени величина $u(\tau)$ может выйти за пределы своего максимально допустимого значения. В этом случае в качестве дополнительного условия для нахождения константы C в выражении (19) следует выбрать условие

$$|u(\tau)|\le u_{\text{макс}},\ (0\le\tau\le 2\pi). \quad (24)$$

Можно подойти к решению этой проблемы и иначе. Следует увеличить время успокоения $T>2\pi$ и вновь проверить условие (24). Так можно поступать до тех пор, пока неравенство (24) не будет выполнено. Выбор того или иного решения зависит от требований конкретной задачи.

В рассматриваемой системе, в отличие от известной задачи математической физики, нить не остаётся неподвижно закреплённой между точками A и B, а перемещается с постоянной линейной скоростью $V_{\text{н}}$. Поэтому для того, чтобы управление $u(\tau)$, прикладываемое к одной из этих точек, обеспечивало эффективное управление, необходимо, чтобы скорость нити $V_{\text{н}}$ была намного меньше, чем скорость распространения стоячей волны вдоль этой нити $V_{\text{в}}$.

Экспериментальные исследования, проведенные на реальной установке, показали, что оптимальной скоростью обращения нити, обеспечивающей наилучшее качество разреза и, в то же время, высокую производительность работы, является скорость $V_{\text{н}}=5\div 9\text{м/с}$, а оптимальная сила натяжения нити $F_{\text{н}}$ не должна превышать $10\,H$. Для разрезания кристаллов использовалась хлопчатобумажная нить диаметром $0,7\cdot 10^{-3}\text{м}$ с плотностью $\rho\approx 0,4\text{кг/м}^3$. Учитывая, что длина нити между роликами составляет $l=1\text{м}$, определим скорость a распространения колебаний вдоль нити:

$$a=\sqrt{\frac{F_{\text{н}}}{\rho_{\text{л}}}}=\sqrt{\frac{10}{1\cdot 3,14\cdot\left(0,35\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot 0,4}}\approx 81,6\text{м/с}.$$

Даже при максимальной скорости обращения нити $V_{\text{н}}=9\text{м/с}$ скорость распространения волны $V_{\text{в}}=81,6\text{м/с}$ почти на порядок выше, а время полного успокоения колебаний

$$t_{\text{мин}} = \frac{2l}{a} = 0{,}024\ \text{с}.$$

За это время перемещение нити составит примерно $22 \cdot 10^{-2}$ м. Если колебание возникнет в той же точке, где будет приложено управление $u(t)$, то оно будет погашено ещё до попадания в область кристалла и за время $t_{\text{мин}}$ реального дефекта не возникнет.

Выводы. Найдено оптимальное решение задачи уменьшения дефектов при разрезании монокристаллов. В дальнейшем предполагается проведение натурного эксперимента или физического моделирования для подтверждения возможности реализации оптимального управления.

Список литературы: 1. *Рогачев А.И., Суздаль В.С., Абрамова Л.С.* Исследование процесса возникновения дефектов при разрезании монокристаллов// Вестник Харьковского политехнического института. – Харьков: ХГУ, 1990. – Вып.16. – №278. – С.11–13. **2.***Цяцька Д.Н., Рогачев А.И.* Цифровая система управления процессом обработки монокристаллов/ II Університетська науково-практична студентська конференція магістрів Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».: тези доповідей: у 3-х т. – Т.2. – Харків: НТУ «ХПІ», 2008.– С.34–36. **3.***Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с. **4.***Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

Поступила в редколлегию 20.07.09