УДК 65.012.34

САМОРОДОВ В.Б., д.т.н., проф., НТУ «ХПИ»
КЛИМЕНКО Т.А., инж., НТУ «ХПИ»

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫМ ЗАПАСОМ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ АВТОСЕРВИСНОЙ ОТРАСЛИ

У статті розглянутий порядок визначення раціональної величини багатономенклатурного запасу на підставі методики, що використовує критерій ефективності – середній чистий прибуток підприємства від реалізації купленого запасу та прогресивних методів статистичної обробки попиту. Застосовані нові технології виділення трендової і сезонної складової при аналізі процесу попиту на запасні частини до автотракторної техніки.

Введение. Современная теория управления запасами постоянно пополняется новыми моделями и методами определения рационального размера запасов. Спрос на такие методы постоянно стабилен, так как управление запасами на предприятиях связано с наибольшими затратами и, как следствие, возможности получения наибольшей прибыли от реализации закупленного товара, что делает разработку соответствующих методов актуальной и практически востребованной.

Анализ последних достижений публикаций. В последнее время в научных публикациях всё чаще звучат призывы к использованию критерия прибыльности предприятия, как к основному и единственному для оценки эффективности тех или иных логистических операций [1,2]. В работе [3] было предложено решать задачу управления многономенклатурным запасом по критерию – средняя чистая прибыль предприятия от реализации закупленного запаса. В работе [4] описан алгоритм статистической обработки данных о спросе на товар, используемый для последующих вычислений рационального размера многономенклатурного запаса на основании критерия эффективности, предложенного в работе [3]. Перейдем далее к численному моделированию задачи управления многономенклатурным запасом с использованием реальных статистических данных о спросе на запасные части к автомобильной и тракторной технике.

Цель и постановка задачи. Целью настоящей работы является получение методики определения рациональной величины заказываемого товара для оптимального управления запасами автосервисного предприятия.

Определение рациональной величины многономенклатурного запаса. По результатам непосредственных наблюдений за спросом на товары, используемые в ходе эксплуатации автомобильной и тракторной техники, были получены необходимые данные для расчетов. В соответствии с принятой технологией хранения весь перечень номенклатур разделен на три группы. В первую группу входят все изделия, при хранении которых к складскому помещению не предъявляются какие-либо требования (насосы, кольца, поршни и т.п.). Вторую группу составляют изделия, которые должны храниться в специальном помещении, удовлетворяющем требованиям противопожарной безопасности (горюче-смазочные материалы и технические жидкости). Наконец, отдельно должны содержаться шины, условия хранения которых, оговорены соответствующей Инструкцией.

Графические отображения динамики спроса приведены на рис.1. Эти данные были статистически обработаны в соответствии с методикой, изложенной в работе [4].

При этом на этапе выделения детерминированной непериодической составляющей наблюдаемых временных рядов было учтено, что каждый из этих рядов представляет собой совокупность измерений $Y_n = (y_1,...,y_n)$, проведенных в равноотстоящие друг от друга моменты времени, $t_1,t_2,t_3...t_n$, так что $t_j = t_0 + jh$, $j = 1,2,...n$.

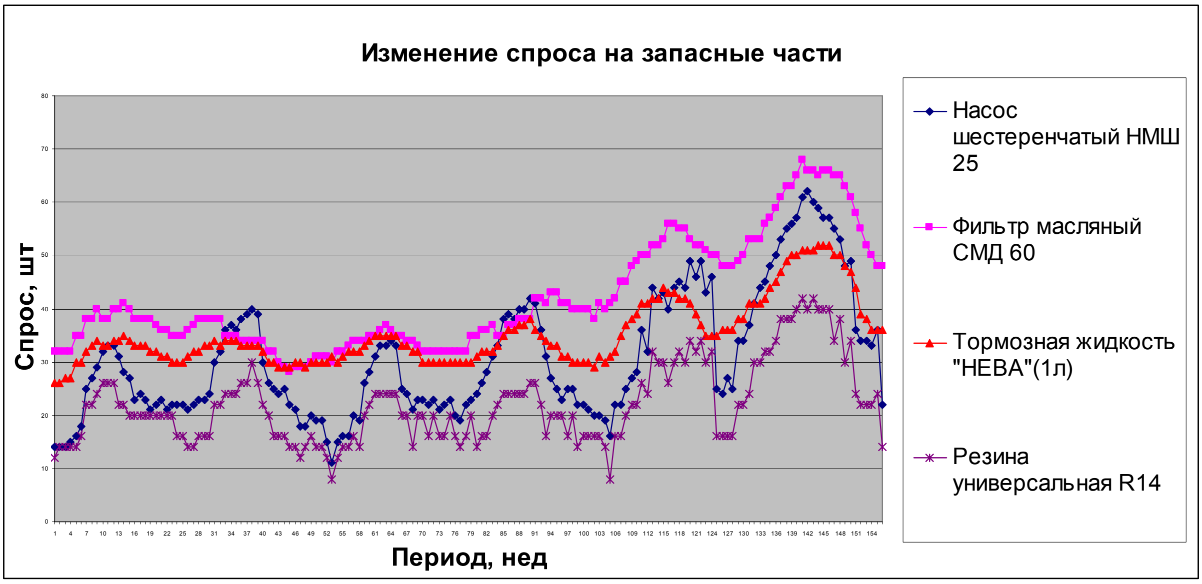


Рисунок 1 – Динамика спроса

Выберем совокупность полиномов, ортогональных на этой системе равноотстоящих точек. В качестве таких полиномов используем полиномы Чебышева. Введем многочлены вида

$$P_i(j) = P_i\left(\frac{t_j - t_0}{h}\right) = \sum_{s=0}^{i}(-1)^s C^s{}_i C^s{}_{i+s}\frac{j^{(s)}}{n^{(s)}}, \tag{1}$$

где $i = 0,1,2,...,k,\quad j = 1,2,...,n.$

Теперь будем искать наилучшую в смысле метода наименьших квадратов аппроксимацию функции в виде линейной комбинации полиномов (1). Введем многочлен степени k:

$$Q_k(j) = \sum_{i=o}^{k} a_i P_i(j). \tag{2}$$

Задача состоит в отыскании набора $(a_0, a_1,...a_k)$, минимизирующего сумму квадратов отклонений измеренных значений $(y_1, y_2,...y_n)$ от предсказываемых многочленом (2). Введем критерий

$$J=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j-Q_k(j)\right]^2.$$

После выполнения необходимых преобразований искомый аппроксимирующий многочлен, оптимальный в смысле метода наименьших квадратов, имеет вид

$$Q_k(j)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}y_iP_i(j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P^2{}_i(j)}P_i(j). \tag{3}$$

Описанный выше метод аппроксимации функции совокупностью полиномов, ортогональных на системе равноотстоящих точек, позволяет получить численные значения коэффициентов аппроксимации, не решая систем нормальных уравнений Гаусса, что существенно упрощает процедуру выделения непериодической составляющей из процесса спроса.

Теперь получим выражение для расчета элементов корреляционной матрицы ошибок оценок параметров. В соответствии с общим правилом

$$K_{\hat{a}_{i_1},\hat{a}_{i_2}}=M\left[\left(\hat{a}_{i_1}-a_{i_1}\right)\left(\hat{a}_{i_2}-a_{i_2}\right)\right]=M\left[\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}y_jP_{i_1}(j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P_{i_1}^2(j)}-a_{i_1}\right)\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}y_jP_{i_2}(j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P_{i_2}^2(j)}-a_{i_2}\right)\right].$$

Так как

$$y_j=\tilde{y}_j+v_j=\sum_{i=0}^{k}a_iP_i(j)+v_j,$$

то, имеем

$$K_{\hat{a}_{i_1}\hat{a}_{i_2}}=M\left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}a_iP_i(j)P_{i_1}(j)-a_{i_1}\sum\limits_{j=1}^{n}P_{i1}^2(j)+\sum\limits_{j=1}^{n}v_jP_{i_1}(j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P_{i1}^2(j)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}a_iP_i(j)P_{i_2}(j)-a_{i_2}\sum\limits_{j=1}^{n}P_{i_2}^2(j)+\sum\limits_{j=1}^{n}v_jP_{i_2}(j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P_{i_2}^2(j)}\right]=$$

$$= M\left[\frac{\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} v_{j_1} v_{j_2} P_{i_1}(j_1) P_{i_2}(j_2)}{\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} P^2{}_{i_1}(j_1) P^2{}_{i_2}(j_2)}\right] = \frac{\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} K_{j_1 j_2} P_{i_1}(j_1) P_{i_2}(j_2)}{\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} P^2{}_{i_1}(j_1) P^2{}_{i_2}(j_2)}, \tag{4}$$

Здесь $K_{j_1 j_2}$ - коэффициент корреляции между измерениями j_1 и j_2. Причем $i_1, i_2 = 0,1,2,...,k.$ Если измерения некоррелированы, то соотношение (3) упрощается к виду

$$K_{\hat{a}_{i_1}\hat{a}_{i_2}} = Д(\hat{a}_i) = \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1} P_i^2(j)}; \qquad K_{\hat{a}_{i_1}\hat{a}_{i_2}} = 0, i_1 \neq i_2,$$

то есть, корреляционная матрица становится диагональной.

Как уже отмечалось, достоинства метода особенно ощутимы, когда количество измерений невелико, а их ошибки значительны. Помимо этого отметим, что соотношения (3) дают явное аналитическое представление для коэффициентов аппроксимации, позволяющее провести непосредственный анализ качества аппроксимации, который был бы практически неосуществим при использовании общего метода наименьших квадратов, обеспечивающего лишь численное решение поставленной задачи.

Далее, с использованием полученных соотношений, было осуществлено выделение детерминированной непериодической составляющей. В частности, для временного ряда №1 детерминированная трендовая составляющая была описана совокупностью полиномов Чебышева нулевого, первого и второго порядков. При этом в соответствии с расчетами, проведенными по формулам (3), был получен вектор

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25{,}261 \\ -0{,}104 \\ 1{,}68 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Тогда аппроксимирующий многочлен, описывающий детерминированное непериодическое поведение спроса, имеет вид

$$\hat{y}(j) = 25{,}261 - 0{,}104 P_1(j) + 1{,}68 \cdot 10^{-3} P_2(j)$$

После выделения этой составляющей спроса был проведен расчет параметров периодической оставляющей. Ряд $w(j) = y(j) - \hat{y}(j)$, $j = 1,2,...,n$, описан композицией гармоник $\sin\frac{2\pi}{T}j$ и $\cos\frac{2\pi}{T}j$. Очевидное наличие в ряду $\hat{w}(j)$ сезонной составляющей дает возможность обоснованного использования оценки продолжительности периода $T = 26$ недель.

При этом получим

$$\hat{w}(j) = A_1 \sin\frac{\pi}{13} j + B_1 \cos\frac{\pi}{13} j, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

$$A_1 = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{w}(j)\sin\frac{2\pi}{n} j, \qquad B_1 = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{w}(j)\cos\frac{2\pi}{n} j \cdot$$

Для проверки наличия автокорреляции остатков в ряду $v(j) = w(j) - \hat{w}(j)$ был рассчитан параметр d Дарбина – Уотсона

$$d = \frac{\sum_{j=1}^{n} (\hat{w}(j+1) - \hat{w}(j))^2}{\sum_{j=1}^{n} w^2(j)}.$$

Вычисленное для реальных данных значение $d = 1{,}46$ сравнивалось с табличными критическими значениями. Для полинома второй степени и объема выборки 160 значений по таблице критических значений статистики Дарбина-Уотсона имеем $d_1 = 1{,}63$, $d_2 = 1{,}72$. Поскольку значение $d < d_1$ гипотезу об отсутствии корреляции следует отвергнуть. Причиной наличия автокорреляции в случайных отклонения от тренда является неточность использованной модели. Анализ временного ряда, графически отображенного на рис. 1, показывает, что амплитуды гармонических составляющих тренда меняются во времени. В связи с этим введем модель сезонной составляющей следующим образом

$$\hat{w}(j) = (a_{10} + a_{11} j)\sin\frac{\pi}{13} j + (b_{10} + b_{11} j)\cos\frac{\pi}{13} j \; .$$

Для отыскания неизвестных параметров a_{10}, a_{11}, b_{10}, b_{11} используем метод наименьших квадратов. Непосредственный просчет дает следующие результаты:

$$a_{10} = 5{,}63,\; a_{11} = -0{,}02,\; b_{10} = -4{,}52,\; b_{11} = -0{,}05.$$

С использованием полученных результатов вновь был проведен расчет параметра d Дарбина-Уотсона. При этом новое значение $d = 1{,}89$.

Так как теперь $d_2 < d < 4 - d_2$ гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается. Построим теперь гистограмму случайных значений $v(j)$, $j = 1,2,\ldots,n$.

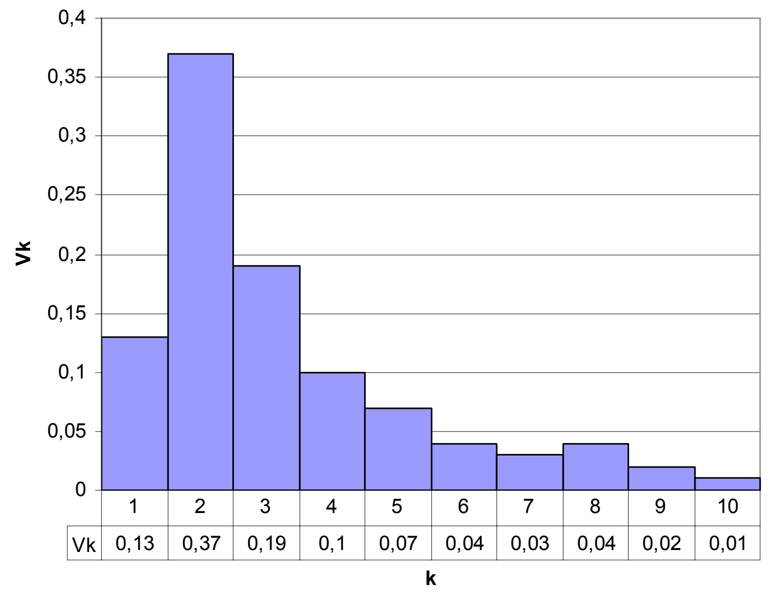
Число разрядов вычислим по формуле

$$k = E(0{,}8\sqrt{n}) = 10.$$

Поскольку $v_{\max} = \max_j \{v(j)\} = 10{,}6$, $v_{\min} = \min_j \{v(j)\} = 0{,}54$, то

$$\Delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{k} \cong 1{,}0.$$

При этом гистограмма значений для временного ряда $v(j)$, $j=1,2,...,n$, имеет вид, приведенный на рис. 2.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vk	0,13	0,37	0,19	0,1	0,07	0,04	0,03	0,04	0,02	0,01

Рисунок 2 – Гистограмма значений временного ряда $v(j)$

Характерный вид полученной гистограммы дает основания считать, что случайная величина v распределена по закону Релея:

$$\varphi(v)=\frac{v}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Значение σ^2 оценим, используя метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия имеет вид

$$P=\prod_{j=1}^{n}\frac{v_j}{\sigma^2}e^{-\frac{v_j^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma^{2n}}\prod_{j=1}^{n}v_j e^{-\frac{v_j^2}{2\sigma^2}}.$$

Непосредственный расчет дает значение $\hat{\sigma}^2=2{,}143$. Корректность гипотезы о распределении Релея проверим по критерию согласия χ^2. Вычислим значение

$$\chi^2=\sum_{S=1}^{k}\frac{(P_S\cdot n-m_S)^2}{P_S\cdot n},$$

Вычисленное значение $\chi^2=11{,}6$ сравниваем с критическим $\chi_{кр}^{2}$, взятым из таблицы распределения Пирсона при уровне значимости $\alpha=0{,}05$ и числе степеней свободы, равном $k-e$ (e- число параметров плотности распределения). При этом $k-e=9$, $\chi_{кр}{}^{2}=16{,}919$.

Поскольку наблюдаемое значение $\chi^{2}<\chi_{кр}{}^{2}$, то следует считать, что принятая гипотеза не противоречит опытным данным. Используем полученные результаты для расчета рационального запаса запасных частей на очередную неделю с номером $(n+1)$.

При этом

$$Z_{n+1}=a_0+a_1P_1(n+1)+a_2P_2(n+1)+(a_{10}+a_{11}j)\sin\frac{\pi}{13}(n+1)+(b_{10}+b_{11}j)\cos\frac{\pi}{13}(n+1)+z,$$

где z - составляющая запаса, соответствующая случайному спросу, отыскивается из уравнения

$$\int_0^z \frac{v}{\sigma^2}e^{-\frac{v^2}{2\sigma}}dv=r,$$

Отсюда

$$1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=r,\qquad -\frac{z^2}{2\sigma^2}=\ln(1-r),\qquad z=\sigma\left[-2\ln(1-r)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда рациональное значение запаса шестеренчатых насосов НМШ-25 на очередную 157-ю неделю равно 28 штук. Аналогичные расчеты проводятся и по остальным видам товаров.

Выводы

В статье предложена методика определения рациональной величины запаса автотракторных запасных частей. Для выделения тренда при анализе процесса спроса были использованы полиномы Чебышева, ортогональные на множестве равноотстоящих точек, а для выделения сезонной компоненты применено описание ее суперпозицией гармоник с переменной амплитудой, что позволило наиболее точно описать спрос на товар и, соответственно, выбрать наиболее рациональный запас.

Список литературы: **1.** *Постан М.Я.* / О влиянии теории управления запасами на развитие логистики. Логистика: проблемы и решения. №3(10). Пресса – 2007. – С.76-81. **2.** *Павлова Е.Н.* / Управление предприятием и оптимизация затрат. Логистика: проблемы и решения. №6(13). Пресса – 2007. – С.36-41. **3.** *Серая О.В., Самородов В.Б., Клименко Т.А* / Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами. Вестник ХНАДУ. №45. ХНАДУ – 2009. – С.31-34. **4.** *Самородов В.Б., Клименко Т.А.* / Марковская аппроксимация случайного процесса спроса. Вісник східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. № 4(134), ч. 2. ВУИД – 2009. – С.194-201.

Поступила в редколлегию 10.06.10