

УДК 629.113

**В. П. САХНО**, д-р техн. наук, проф. НТУ, Київ;  
**В. Г. ВЕРБИЦЬКИЙ**, д-р фіз.-мат. наук, проф. ДААТ, Донецьк;  
**В. В. КОНДРАТЬЄВ**, ст. викл. ДААТ

## ВПЛИВ ПОЗДОВЖНЬОЇ СИЛИ У ПЛЯМІ КОНТАКТУ ВЕДУЧИХ КОЛІС НА КУРСОВУ СТІЙКІСТЬ РУХУ АВТОМОБІЛІВ

Встановлено, що поздовжні сили у плямі контакту ведучих коліс з опорною поверхнею суттєво змінюють показники курсової стійкості руху автомобіля. У той же час перерозподіл навантаження по колесам автомобіля у поздовжній площині майже не впливає на показники стійкості руху автомобіля.

**Ключові слова:** автомобіль, сила, стійкість, фазовий портрет, біфуркаційна множина, схема, математична модель.

**Вступ.** Успішне розв'язання питання про курсову стійкість руху автомобіля залежить від правильного вибору розрахункової схеми, яка б найбільш повно відображала найважливіші фактори, що впливають на цю експлуатаційну властивість, і від точності оцінки сил взаємодії пневматичної шини з дорогою.

Теоретично модель автомобіля повинна якнайбільш повно відображати реальний автомобіль. Дослідження автомобіля як системи кількох тіл, що з'єднані голономними і неголономними в'язями, приводить до вивчення складної механічної системи з великою кількістю ступенів свободи, яка описується системою диференціальних рівнянь високого порядку, наприклад, у роботах [1], [2] автомобіль поданий у вигляді складної, багатомасової просторової математичної моделі, в якій враховані всі ступені свободи кузова і руху непідресорених мас щодо нього. В розрахункову схему були включені також кінематичні характеристики передньої і задньої підвісок, що визначають геометричні зв'язки, які накладаються на рух непідресорених мас відносно кузова; рульове керування розглядалося у вигляді трьохмасової системи (два керованих колеса і рульове колесо), з'єднаних між собою пружними зв'язками. Враховано також сухе тертя і зазори і рульовому приводі, а також вплив кутів установки коліс і нелінійності підвіски (обмежувачі ходу ресор, несиметричність характеристик амортизаторів, сухе тертя тощо). В результаті система була описана дуже складною системою диференціальних рівнянь сімнадцятого порядку.

В роботі [1] відзначається, що ускладнення математичної моделі не завжди дає позитивний ефект, оскільки при визначенні масових розмірів (маси, моменти інерції) і характеристик зв'язків неминучі похибки, сполучення яких призводить до неточностей при визначенні кінцевих результатів. Крім того, практичне використання подібних розрахункових схем потребує попереднього аналітичного і, особливо, експериментального визначення великої кількості конструктивних параметрів автомобіля і шин. Отже, при розробці математичної моделі автомобіля постає питання про можливість використання тих чи інших припущень, які з одного боку дозволили б понизити ступінь диференціальних рівнянь, а з другого – дозволили б описати рух автомобіля з достатнім ступенем точності.

Одним із підходів в рішенні цієї задачі може бути метод послідовного ускладнення розрахункової моделі [3]. Для кожного з варіантів цієї моделі будуть отримані основні кількісні характеристики, що визначають її стійкість: критична

© В. П. Сахно, В. Г. Вербицький, В. В. Кондратьєв, 2013

швидкість стаціонарних режимів руху, оцінки їх областей тяжіння, біфуркаційна множина як узагальнена характеристика стійкості всієї множини стаціонарних режимів моделі [3-7].

**Метою роботи** є аналіз стійкості руху автомобіля з урахуванням взаємовпливу подовжніх і поперечних сил у плямі контакту ведучих коліс з опорною поверхнею та перерозподілу вертикального навантаження по колесам автомобіля.

**Основний розділ.** Для визначення параметрів стаціонарних режимів руху і аналізу їх стійкості приймемо математичну модель плоскопаралельного руху автомобіля, що враховує перерозподіл вертикальних реакцій і взаємовплив подовжніх і поперечних сил у плямі контакту. При застосуванні такої моделі (велосипедна схема, рис.1), до кожної осі прикладені бічні сили  $Y$ , вертикальні реакції  $Z$ , а також подовжні (тягові або гальмівні) сили  $X$ , що діють на передній або задній осі автомобіля. Центр мас знаходиться у точці  $C$ . Позначимо далі:  $v$  - подовжня складова швидкості центру мас (ЦМ), яка підтримується постійною;  $u$  - поперечна складова проекції швидкості ЦМ;  $\omega$  - кутова швидкість автомобіля щодо вертикальної осі;  $a, b$  - відстані від центру мас автомобіля до передньої керованої осі і задньої осі.

Для порівняльного аналізу розглядаються 3 варіанти математичної моделі з урахуванням певних чинників:

- без перерозподілу вертикальних реакцій і без впливу подовжніх сил;
- з перерозподілом вертикальних реакцій, але без впливу подовжніх сил;
- з перерозподілом вертикальних реакцій і з урахуванням впливу подовжніх сил.

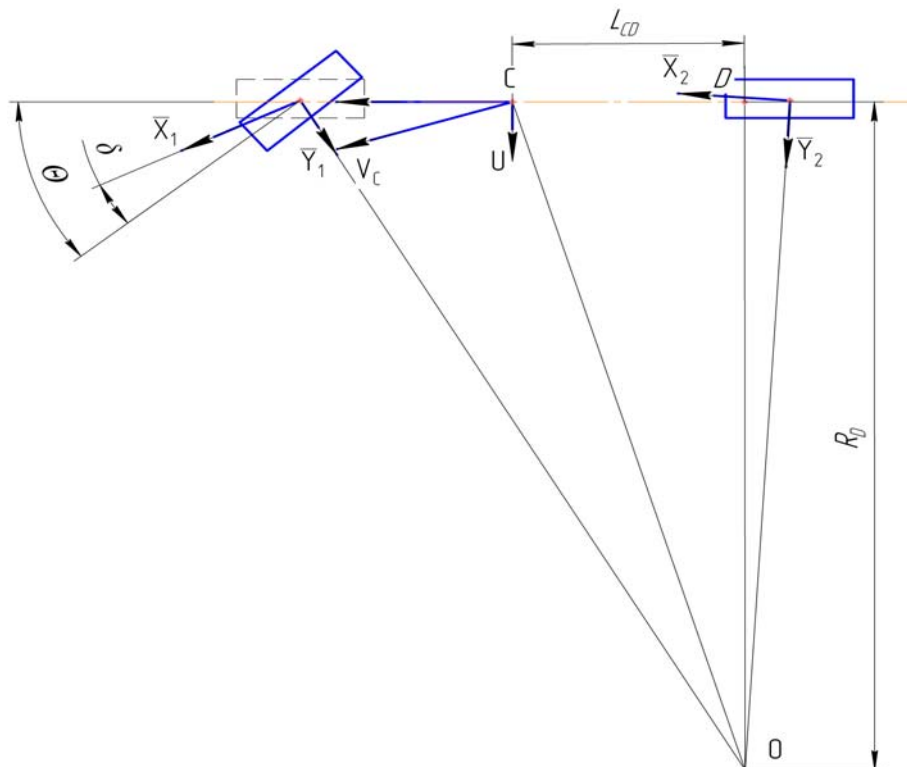


Рисунок 1- Розрахункова схема моделі легкового автомобіля

Розглянемо випадок руху, коли  $X_1 \neq 0, X_2 = 0$ . Отримаємо наступну систему кінцевих рівнянь, що визначає параметри кругових режимів руху при фіксованих значеннях  $(u^*, \omega^*)$  керованих параметрів  $V = const; \theta = const$

$$\begin{aligned} -u \cdot \omega \cdot m &= -Y_1 \cdot \sin \Theta + X_1 - X_{cd}; \\ \omega \cdot V \cdot m &= Y_1 \cdot \cos \Theta + Y_2 + X_1 \cdot \sin \Theta; \\ a \cdot Y_1 \cdot \cos \Theta - b \cdot Y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

З першого рівняння системи маємо:

$$X_1 = -m \cdot u \cdot \omega + Y_1 \cdot \sin \Theta + X_{cd}; \quad (2)$$

Сумарну силу опору руху знаходимо за формулою:

$$X_{cd} = f(Z_1 + Z_2) + 0,5 \cdot C_x \cdot \rho_v \cdot F \cdot v^2, \quad (3)$$

де  $f$  - коефіцієнт опору кочення;

$C_x$  - безрозмірний коефіцієнт повної аеродинамічної сили;

$\rho_v$  - густина повітря;

$F$  - площа проекції автомобіля на площину, що перпендикулярна його подовжній осі.

Приведені сили відведення на осях автомобіля  $Y_i$  визначаються відповідно до гіпотези І. Рокара. При цьому залежність сили відведення від кута відведення має характер функції насичення і може бути описана різними способами, один з яких приведений нижче (як функція кута відведення, вертикальної реакції опорної поверхні і коефіцієнта зчеплення в поперечному напрямку):

$$Y_i = \frac{k_i(Z_i) \times \delta_i}{\sqrt{1 + \left( \frac{k_i(Z_i) \times \delta_i}{\varphi_i \times Z_i} \right)^2}}, \quad (4)$$

де  $k_i$  - коефіцієнт опору бічному відведенню;  $Z_i$  - вертикальні реакції опорної поверхні на осі автомобіля [3]:

$$Z_1 = \frac{mgb}{l} - \frac{mu\omega h}{l}, \quad (5)$$

$$Z_2 = \frac{mga}{l} + \frac{mu\omega h}{l}, \quad (6)$$

де  $h$  - висота центру мас автомобіля.

Рівняння руху в рухомій системі координат (осі Кеніга) мають той же вигляд, що і в нерухомій (абсолютна похідною вектора швидкості є сумою «місцевої» похідної

вектора швидкості і прискорення, пов'язаного з обертанням рухомої системи координат):

$$\frac{d\bar{V}_c}{dt} = \frac{d\tilde{V}_c}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{V}_c. \quad (7)$$

Рівняння руху автомобіля в рухомій системі координат :

$$\begin{aligned} m v \omega &= X_1 \sin \Theta + Y_1 \cos \Theta + Y_2; \\ a(X_1 \sin \Theta + Y_1 \cos \Theta) - Y_2 \cdot b &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Наведемо приклад розрахунку за таких параметрів системи:  
 $a = 1,5$  м;  $b = 1,175$  м;  $l = 2,675$  м;  $h = 0,5$  м;  $m = 1675$  кг;  $f = 0,01$ ;  $C_x = 0,33$ ;  $\rho_B = 1,2041$  кг/м<sup>3</sup>;  $F = 2,316$  м<sup>2</sup>.

На рис. 2 наведена біфуркаційна множина, а на рис. 3 – фазові портрети (перший варіант математичної моделі) за швидкості 20 м/с і кутах повороту керованих коліс  $\Theta = 0,01$  рад і  $\Theta = 0,03$  рад.

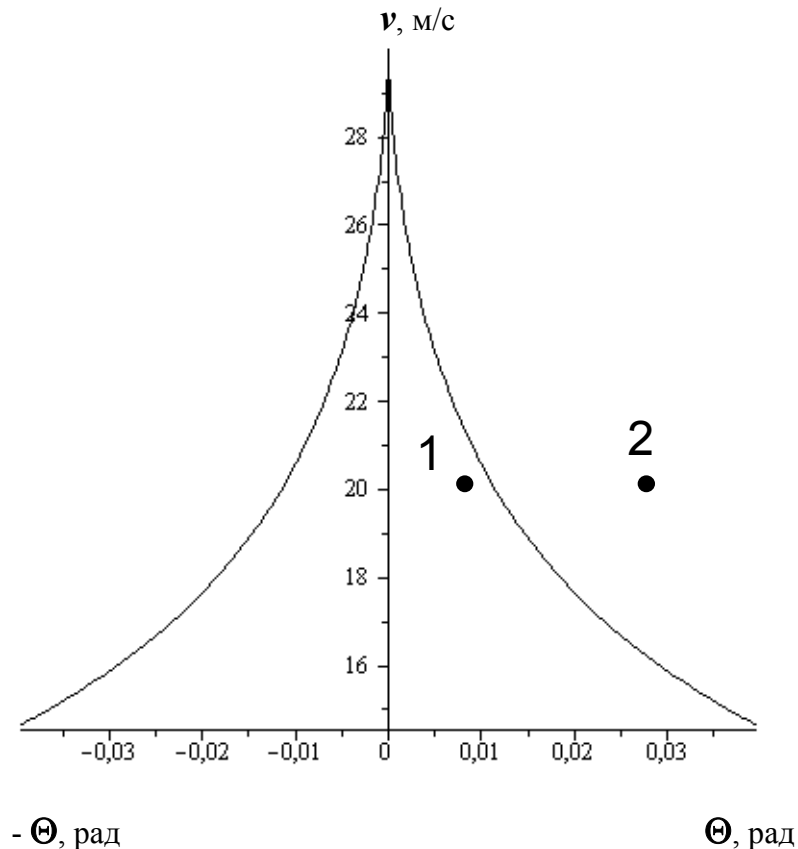


Рисунок 2 – Біфуркаційна множина для першого варіанту моделі

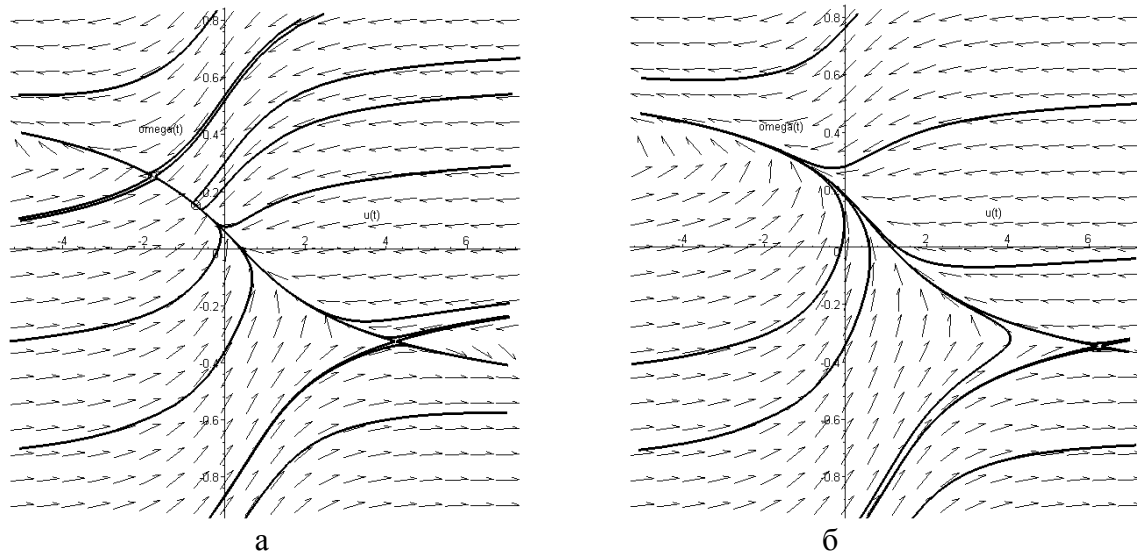


Рисунок 3 – Фазові портрети для першого варіанту моделі:  
 а – швидкість 20м/с  $\Theta=0.01$ рад; б – швидкість 20м/с  $\Theta=0.03$ рад

Множина точок в області під графіком відповідає значенням кута повороту  $\Theta$  і швидкості  $v$  руху автомобіля, за яких реалізуються три стаціонарні режими руху: один стійкий і два нестійких. В області над графіком може бути лише один нестійкий режим руху автомобіля, що видно з біфуркаційної множини в довільних точках «1» і «2» (рис. 2), які відповідають швидкості 20 м/с і кутам повороту 0,01 рад і 0,03 рад. Аналіз фазового портрета (рис.3, а) вказує стійкість центрального режиму ( $u=-0,7172604787$ ,  $\omega=0,1523912954$ ) і дає можливість оцінити область його тяжіння, обмежену нестійкими режимами ( $u=-1,767106763$ ,  $\omega=0,2535805500$ ) і ( $u=4,233903013$ ,  $\omega=-0,3247000938$ ).

Рис. 3,б ілюструє характер поведінки автомобіля при різних початкових збуреннях в області з одним нестійким стаціонарним режимом (відповідає точці «2» на рис. 2). У цьому випадку спостерігається інтенсивне наростання бічної складової швидкості центру мас.

На рис. 4 наведена біфуркаційна множина для другого і третього варіантів математичної моделі, а на рис. 5 – фазові портрети моделі 2 за швидкості 30м/с і кутах повороту керованих коліс  $\Theta=0.004$ рад;  $\Theta=-0.004$ рад;  $\Theta=0.001$ рад.

Як сліду з рис. 4, біфуркаційна множина при урахуванні додаткових параметрів в математичній моделі змінює свій вигляд, залишаючись симетричною. На діаграмі з'являються області, де можливі три і п'ять стаціонарних режиму руху, що ускладнює фазовий портрет і структуру області тяжіння стійких стаціонарних режимів руху. Так в області, що містить точку «3» (рис.4), можуть реалізовуватися три стаціонарні режими (два стійких і один нестійкий); в області, що включає точки «1» і «2», тільки один нестійкий режим.

Для пояснення появи нових стаціонарних режимів побудуємо фазові портрети для другого варіанту моделі в довільно вибраних точках 1-3 (рис.4) за швидкості 30м/с і кутах повороту керованих коліс автомобіля  $\Theta=0.004$ рад;  $\Theta=-0.004$ рад;  $\Theta=0.001$ рад

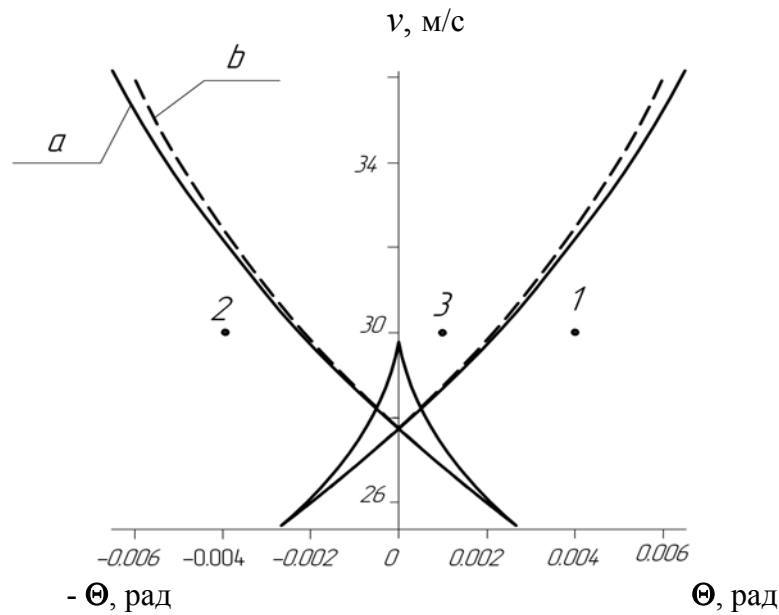


Рисунок 4 – Біфуркаційна множина:  
 а - для другого варіанту моделі; б - для третього варіанту моделі

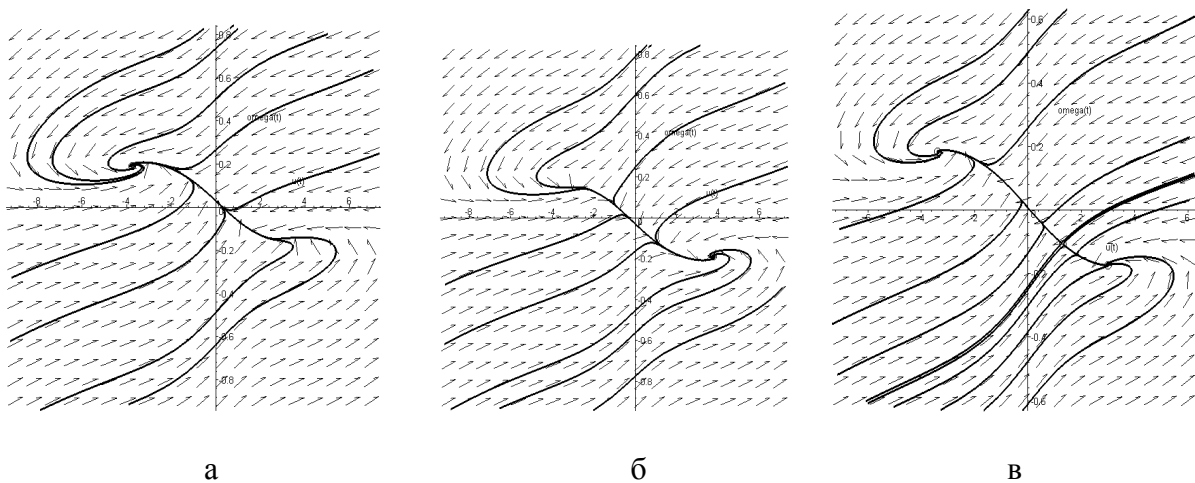


Рисунок 5 – Фазові портрети для другого варіанту моделі за швидкості 30м/с :  
 а –  $\Theta=0.004$ рад; б –  $\Theta=-0.004$ рад; в –  $\Theta=0.001$ рад.

Точкам «1» і «2» (рис.4) відповідають симетричні повороти – стаціонарні режими відрізняються лише знаками ( $u=-3,758484253$ ,  $\omega=0,1905054101$  і  $u=3,758484253$ ,  $\omega=-0,1905054101$ , рис. 5 а, б). Точці «3» відповідають три режими: два стійких ( $u=2,993623084$ ,  $\omega=-0,1738936963$ ;  $u=-3,389855631$ ,  $\omega=0,1831364330$ ) і один нестійкий ( $u=-0,7172604787$ ,  $\omega=-0,106746196$ ), реалізація одного з них залежить від початкових умов ( $u_0, \omega_0$ ), які можуть бути оцінені на основі фазового портрета. Область з п'ятьма стаціонарними режимами не розглядалася із-за її малості (практична реалізація параметрів управління з цієї області проблематична).

**Висновки.** Аналіз отриманих результатів вказує на те, що вплив подовжніх сил значно змінює параметри курсової стійкості автомобіля. Вплив перерозподілу навантаження по осям автомобіля не призводить до істотної зміни характеристик стійкості.

**Список літератури:** 1. Аксенов П.В. Многоосные автомобили /П.В. Аксенов. – М.: Машиностроение, 1989. – 279 с. 2. Добрин А.С. Об устойчивости движения многоосных автомобилей относительно заданной траектории /А.С. Добрин, В.С. Дульцев // Труды семинара по устойчивости и управляемости автомобилей. – М.: НАМИ, 1968. – Вып. 2. – С. 27 – 39. 3. Сравнительный анализ математических моделей плоско-параллельного движения с учетом и без учета продольных и поперечных сил / В.П.Сахно, В.Г.Вербицкий, В.В.Кондратьев //Вісник Донецької академії автомобільного транспорту, №3, 2011.- С. 57-65. 4. К вопросу об оценке курсовой устойчивости легкового автомобиля при помощи фазовых портретов / В.А.Макаров , А.В.Костенко , А.В.Петров // Вісник Східноукраїнського нац. університету ім. В.Даля, № 11, 2009. – С. 152 – 156. 5. Певзнер Я.М. Теория устойчивости автомобиля / Я.М. Певзнер. – М.: Машгиз, 1947. – 156 с. 6. Литвинов А.С. Управляемость и устойчивость автомобиля / А.С. Литвинов. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с. 7. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей / Л.Г. Лобас. – К. : Наук. Думка, 1986. – 232 с.

*Надійшла до редколегії 20.04.2013*

УДК 629.113

**Вплив подовжньої сили у плямі контакту ведучих коліс на курсову стійкість автомобіля /В. П. Сахно, В. Г. Вербицкий, В. В. Кондратьев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Автомобіле- та тракторобудування, 2013. – № 30 (1003). – С. 3–9. – Бібліогр.: 7 назв.**

Установлено, що продольные силы в пятне контакта ведущих колес с опорной поверхностью существенно изменяют показатели курсовой устойчивости движения автомобиля. В то же время перераспределение нагрузки по колесам автомобиля в продольной плоскости почти не влияет на показатели устойчивости движения автомобиля.

**Ключевые слова:** автомобиль, сила, устойчивость, фазовый портрет, бифуркационное множество, схема, математическая модель.

It is set that longitudinal forces in the spot of contact of driving-wheels with an underlayment substantially change the indexes of course stability of motion of car. At the same time the redistribution of loading on the wheels of car in a longitudinal plane does not almost influence on the indexes of stability of motion of car.

**Keywords:** car, force, stability, phase portrait, bifurcation great number, chart, mathematical model.