

**В. Г. СОЛОДОВ**

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Обсуждается современное состояние проблемы моделирования турбулентности. При этом существенное внимание уделяется проблеме расчета крупномасштабной турбулентности (LES). Подход основан на осреднении уравнений Навье-Стокса со специальным фильтром, настроенным на выделение вихрей не менее определенного размера. Представлены некоторые методические аспекты моделирования и проблематика подхода к моделированию.

**Ключевые слова:** турбулентность, моделирование больших вихрей, фильтрование уравнений Навье-Стокса.

**Введение.** Турбулентность – всеохватывающее свойство жидкого, газообразного и плазменного состояния вещества. Закономерности турбулентности проявляются в космосе, атмосфере, гидросфере, в разнообразных технических устройствах и биологических системах.

Общей теории турбулентности нет до сих пор, несмотря на старания выдающихся ученых за последние сто лет. В последние десятилетия некоторое развитие получило прямое моделирование турбулентности на крупных вычислительных системах, аккуратная реализация которого, однако, сопряжена с трудно преодолимыми вычислительными затратами сейчас и в ближайшей перспективе.

Наряду с прямым моделированием, развитие также получило менее трудоемкое моделирование турбулентности на основе упрощенного подхода, направленное на выделение основных особенностей турбулентности, так называемое моделирование больших вихрей (*Large Eddy Simulation – LES*).

В настоящее время библиография по *LES* в мировой научной литературе насчитывает несколько тысяч источников. Данное направление развивается и дает конкретные практические результаты, как в предсказании погоды, так и в совершенствовании процессов и машин.

Данная работа является кратким обзором основополагающих результатов по моделированию больших вихрей в турбулентности на основании доступных автору публикаций.

**1. Уравнения движения и модели турбулентности.** Общие свойства турбулентного режима у Хинце, Моница, Колмогорова, Pope, Sagaut, Berselli, Shlaetter [1, 4, 13, 14, 15, 18, 20] представляются следующим образом.

- Турбулентность в измерениях проявляется в виде случайных пульсаций параметров течения в широком диапазоне частот и масштабов.
- Турбулентность возникает при доминировании инерционных свойств течения над вязкими и представляет собой каскад неустойчивостей ламинарных фрагментов течения.
- Турбулентным течениям присущи свойства диффузности и диссипативности.
- Капельность при возникновении турбулентности не является определяющим свойством.
- Турбулентное течение является вращательным в принципе и представляет иерархию вихрей, состоящих в прямом/обратном каскадном процессе обмена энергией пульсаций; поэтому турбулентность трехмерна и нестационарна.
- Турбулентность является свойством течения и не распространяется до молекулярных масштабов, проявляется как свойство именно сплошной среды, но не ее молекулярных свойств.

На рис. 1 показаны отличия актуальной картины турбулентного течения вокруг профиля и осредненного течения. На первом снимке представлена мгновенная картина колеблющегося следа за профилем при числе Маха  $M = 0,6$  и числе  $Re = 220000$  с применением высокоскоростной съемки, и волны, движущиеся вверх по потоку вдоль каждой из поверхностей профиля. На втором снимке экспозиция в  $1/400$  с осредняет это течение по двенадцати циклам, создавая иное представление о движении [21].

Турбулентность обыкновенно изучается на основе уравнений Навье-Стокса (NSE), т. е. на макроуровне, однако существуют работы по турбулентности на основе уравнения Больцмана.

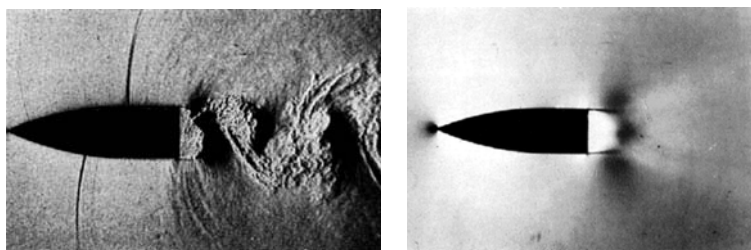


Рис. 1 – Нестационарное и осредненное во времени обтекание профиля [21]

Система уравнений гидродинамики состоит из уравнения неразрывности, уравнения движения и уравнения энергии. Ниже записано уравнение движения при простейших предположениях несжимаемой ньютоновой среды, которое обычно представляется как уравнение Навье-Стокса,

$$u_t + \nabla \cdot (u \otimes u) - \nu \nabla^2 u + \nabla p^* = f, \\ \nabla \cdot u = 0; \quad \Omega \times (0, T), \quad \Omega \in \mathbb{R}^3.$$

Область применимости NSE определяется критериальными условиями, среди которых условие Кнудсена (на основе максвелловского закона распределения нейтральных молекул по скоростям):  $Kn \equiv \lambda / L < 0,1$ , ( $\lambda \sim 6_{10} - 8$  м), и условие Труссделла [16]:  $Tr \equiv \mu \varepsilon / \rho = 1,5Kn \cdot M < 1$ . Таким образом, уравнения NS неприменимы: а) для разреженных газов, на больших скоростях; б) для несжимаемых жидкостей с большой вязкостью при высоких скоростях деформаций.

По уровню приближения в классификации доминирует прямое моделирование турбулентности (DNS) на основе уравнений Навье-Стокса и подходящей разностной сетки (рис. 2). Оно иногда называется численным экспериментом в связи с высокой степенью достоверности.

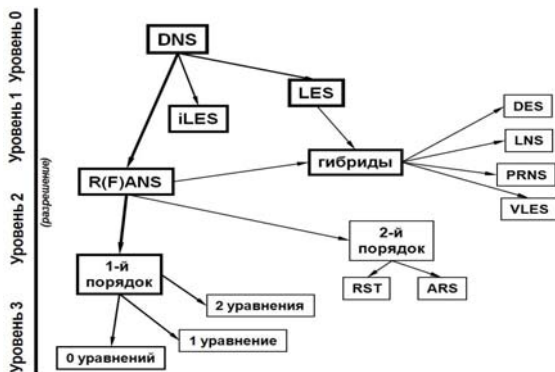


Рис. 2 – Иерархия основных моделей турбулентности, по [3] (Blazek, 2001)

При прямом моделировании турбулентности подразумевается разрешение всех масштабов в объеме  $L^3$  с числом степеней свободы  $N = O(Re^{9/4})$  [19] (Landau, 1950). Количество точек для разрешения течения в канале  $N \sim (0,1Re)^{9/4}$  [9] (Moin, 1982). Временной шаг для разрешения течения в канале  $\Delta t \sim 0,1L / (U \cdot Re^{1/2})$  [5] (Kim, et al., 1987). В технических приложениях преобладает высокорейнольдсова турбулентность. Учет основных характеристик DNS приводит к выводу большинства ведущих ученых – в ближайших 20–30 лет DNS для практически важных инженерных приложений будет недоступно.

Внизу схемы (рис. 2) находятся модели низкой степени приближения для осредненных уравнений NS, как по времени, так и по пространству. Осреднение проводится обыкновенно весьма упрощенно, однако вызывает необходимость замыкания NSE в силу нелинейности конвективного оператора. Эти

замыкания в нижней части схемы, как правило, стационарны и имеют отношение к частным течениям.

Таблица 1 – Употребительные сокращения в теории моделирования турбулентности

ARS	Алгебраическая модель реинольдсовых напряжений
DES	Моделирование отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation)
DNS	Прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation)
ILES	Неявное моделирование крупных вихрей
LES	Моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation)
LNS	Моделирование ограниченных численных масштабов (Limited Numerical Scales)
MILES	Монотонное интегрирование LES (Monotone Integrated LES)
PRNS	Частично разрешаемые уравнения Навье-Стокса
R(F)ANS	Моделирование на основе уравнений NS, осредненных по Рейнольдсу (Фавру)
RSM	Модель реинольдсовых напряжений (Reynolds Stress Model)

**2. Осреднение уравнений NS.** С целью упрощения моделирования турбулентности уравнения NS осредняются а) по Рейнольдсу, б) по Фавру (с весовой плотностью).

**Осреднение уравнений NS по Рейнольдсу (URANS):**

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \psi dt; \quad \psi = \bar{\psi} + \psi';$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}'u_i') = 0.$$

При этом возникает проблема замыкания для  $\bar{\rho}'u_i'$  уже в уравнении неразрывности, а также в уравнениях движения и в уравнении энергии.

**Осреднение уравнений NS по Фавру (UFANS):**

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\bar{\rho}\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho \psi dt \equiv \frac{\bar{\rho}\psi}{\bar{\rho}}; \quad \psi = \tilde{\psi} + \psi'';$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}u_i) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}u_j u_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}[\tilde{\tau}_{ji} - \bar{\rho}u_j''u_i'']$$

Осреднение по Фавру дает более простой вид осредненных уравнений NS. Для несжимаемой среды осреднение по Фавру превращается в осреднение по Рейнольдсу.

Оба типа осреднения действуют сразу на все масштабы турбулентных структур. Осредненные уравнения не замкнуты из-за нелинейности конвективного оператора, замыкание обеспечивается моделями турбулентности (см. например, [22]).

**3. Фильтрованные (FNS) уравнения NS.** Подход к моделированию больших вихрей (LES) является промежуточным по степени разрешения турбулентных структур между DNS и решением осредненных уравнений Навье-Стокса. Концепция

фільтрування основана на осередненні уравнений NS с применением фильтра.

Осредненные величины представляются операторами  $\bar{\psi}(x) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} \psi(\xi) G(x, \xi) d\xi$  – в физическом пространстве; операторами  $\bar{\psi}^\Phi(k, t) = G^\Phi(k) \psi^\Phi(k, t)$  – в спектральном пространстве. Актуальная величина представляется в виде  $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ , ядро оператора осереднения  $G(x, \xi) = f(\Delta, |x - \xi|)$ ; его условие нормировки  $\int_{\Omega} G(x, \xi) d\Omega = 1$ . При этом обеспечивается сходимость к актуальному решению  $\bar{\psi} \rightarrow \psi : L^2(\Omega)$ , if  $\Delta \rightarrow 0$  и  $\|\bar{\psi}\| \leq C\|\psi\|$ .

Существует разнообразие фильтров с различными ядрами (см. например, [22]). Наиболее употребительны классические фильтры:

а) прямоугольный или «коробчатый» фильтр с представлением ядра в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta, & |x - \xi| < \Delta/2; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$G^\Phi(k) = \prod_{j=1}^3 \frac{\sin(0,5\Delta k_j)}{0,5\Delta k_j}.$$

б) гауссов фильтр:

$$G(x, \xi) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{3/2} \exp\left[-6\frac{(x-\xi)^2}{\Delta^2}\right];$$

$$G^\Phi(k) = \exp(-\Delta^2 k^2 / 24)$$

в) спектральный фильтр:

$$G(x, \xi) = \frac{\sin(\pi(x-\xi)/\Delta)}{\pi(x-\xi)};$$

$$G^\Phi(k) = 0; 1, \text{ if } |k_j| \leq \pi/\Delta, j = 1...3.$$

Их графические представления можно встретить в [14, 22].

Гауссов фильтр (как и фильтры на его основе) как в физическом, так и в спектральном пространствах локален, остальные этим важным свойством не обладают.

Спектральный фильтр уничтожает Фурье моды волнового числа большие, чем волновое число отсечения (рис. 3, а); фильтр не локален в физическом пространстве. Позволяет рассчитывать разрешение турбулентных пульсаций не выше частоты отсечения по фильтру.

Невыделенные фильтром особенности должны моделироваться. Если фильтр является оператором Рейнольдса, то  $G(x, \xi) = 1$ . При наличии анизотропии турбулентности предложены обобщения фильтров.

Осреднение уравнений Навье-Стокса с использованием фильтра приводит к осреднению конвективного оператора, в котором появляется среднее от произведения компонент скорости:

$$u_i \bar{u}_j = (\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j) = \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + u'_i u'_j.$$

Применение операции фильтрования к нелинейному конвективному члену NSE исторически

было двухступенчатым. Вначале оператор представлялся в виде суммы тензоров перекрестных и рейнольдсовых напряжений.

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + C_{ij} + R_{ij}.$$

В 1974 г. Leonard [8] привел конвективный оператор к современному виду.

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}.$$

Здесь  $L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  – разрешаемые леонардовы напряжения;  $C_{ij} = \overline{(\bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j)}$  – перекрестные напряжения;  $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  – подсеточные (SGS) рейнольдсовы напряжения. Если фильтр является оператором Рейнольдса, то  $\bar{u} = \bar{u}$ ,  $\bar{u}' = 0$ ,  $\overline{\bar{u} u} = \bar{u} \cdot \bar{u}$  и  $C_{ij} \equiv L_{ij} \equiv 0$ . Таким образом, для оператора фильтра по Рейнольдсу остаются только рейнольдсовы напряжения.

Концепция сеточного фильтрования численных решений уравнений NS состоит в специальном ограничении решений, связанном с размером сетки. Невыделенные фильтром свойства решения моделируются дополнительной приближенной моделью на основе разрешаемых масштабов.

В спектральном пространстве кривая-образ кинетической энергии показывает разрешение низких частот до частоты отсечения (рис. 3, а). На рис. 3, б схематически показаны структуры, которые разрешаются в рамках фильтрованных уравнений. Частотный спектр плотности кинетической энергии турбулентных пульсаций в каверне (рис. 4) показывает насколько DNS богаче RANS.

Система RANS не позволяет явно управлять моделированием, так как отрезающая частота не специфицирована в осредняющем операторе. LES принципиально основана на разделении масштабов. Наименьшие масштабы моделируются статистической моделью подфильтровых/подсеточных масштабов (SFS/SGS). Отрезание высших частот обосновано гипотезой локальной изотропии Колмогорова. LES, использующая фильтрующий оператор, ведет к нестационарному явному 3D моделированию. LES, основанная на специальной аппроксимации схемы, ведет к нестационарному неявному 3D моделированию (iLES).

**4. Определение масштабов.** Большие масштабы описывают динамику турбулентности, ее физический механизм, перенос турбулентности, и производство турбулентной кинетической энергии вихрей больших масштабов. Большие масштабы чувствительны к граничным условиям, т.е. анизотропны; содержат основную часть (80–90 %) турбулентной кинетической энергии. Малые масштабы универсальны и изотропны по Колмогорову; ответственны только за вязкую диссипацию; содержат лишь несколько процентов полной кинетической энергии.

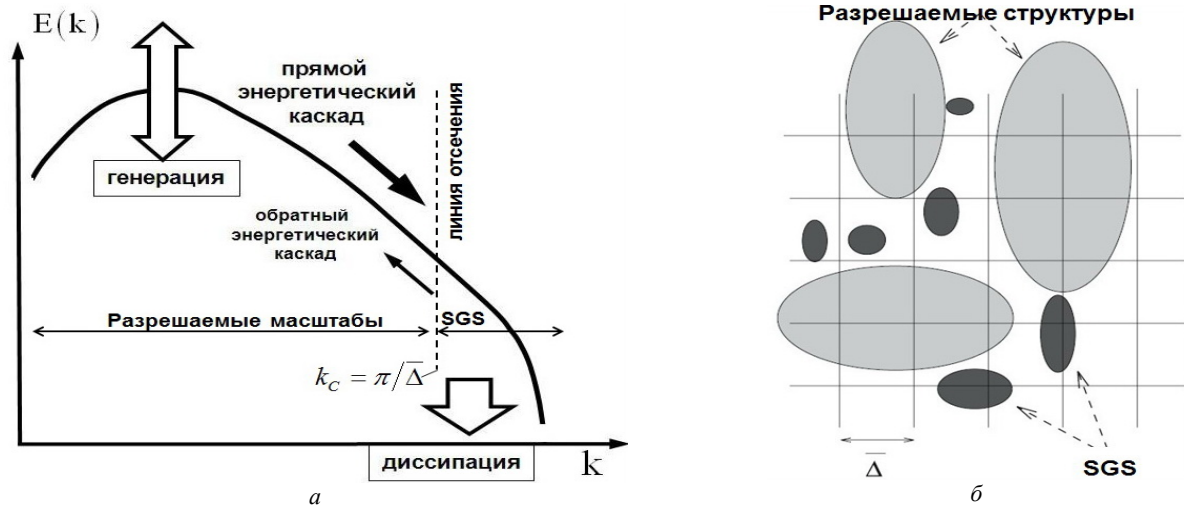


Рис. 3 – Энергетический каскад и разрешаемые турбулентные структуры:  
 а – спектральное представление турбулентности: кинетическая энергия турбулентных пульсаций – интеграл от турбулентного спектра по волновым числам; б – разрешаемые и подсеточные турбулентные структуры [14]

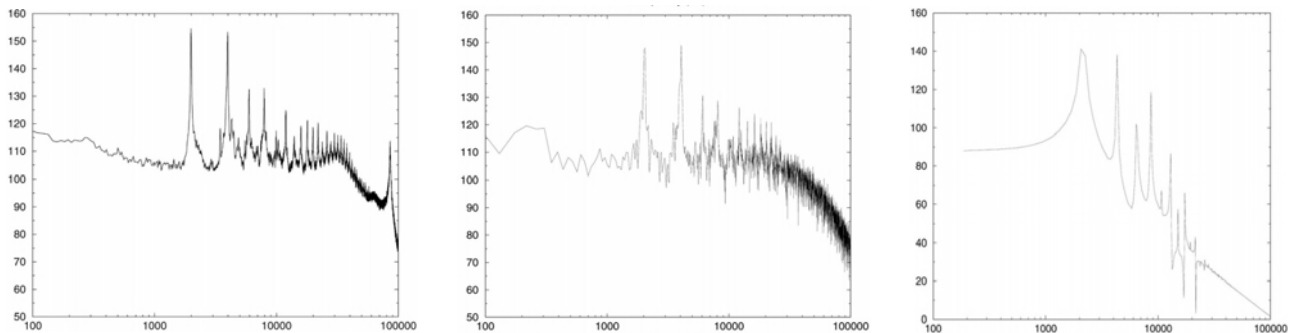


Рис. 4 – Спектральная плотность кинетической энергии турбулентных пульсаций в канале в функции частоты, Гц [14]: слева DNS (L. Jacquin), в центре LES (L. Larcheveque), справа URANS (V. Gleize, ONERA)

**Физические ограничения для подсеточных моделей** [1, 10, 12, 13, 14, 15]. Подсеточные (SGS) модели должны отражать свойства симметрии, присущие истинным масштабам; SGS модели должны быть совместимы с DNS моделями. SGS модели должны иметь то же воздействие на разрешаемые масштабы, что и истинные подфильтровые (SFS) масштабы (дисперсия, диссипация, диффузия).

**Вычислительные ограничения для подсеточных моделей.** SGS модели должны быть экономичны, локальны во времени и пространстве; SGS модели не должны индуцировать численные неустойчивости и ложные эффекты.

Ниже приводятся оценки по вычислительным требованиям к разрешению. Колмогоровский масштаб

$$\text{длины} - \eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}, \text{ где } \varepsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 -$$

скорость диссипации энергии. Вязкая диссипация кинетической энергии доминирует в диапазоне  $0,1 < k\eta < 1$ , где  $k$  – волновые числа, иначе  $6\eta < L < 60\eta$ ; при этом диаметр червеобразных ("wormlike") структур турбулентности составляет  $4\eta - 10\eta$ .

**DNS разрешение изотропной турбулентности и сдвигового течения** (табл. 2). При DNS подразумевается разрешение всех масштабов в объеме  $L^3$  с числом степеней свободы  $N = O(\text{Re}_L^{9/4})$ , где  $\text{Re}_L = LU / \nu$ ,  $U = \sqrt{0,5 u'_i u'_j}$ ,  $L / \eta \cong \text{Re}_L^{3/4}$ , и таким образом,  $N \Delta x \sim \text{Re}_L^{9/4}$  [19] (Landau, 1950). Количество точек для разрешения течения в канале  $N \sim (0,1 \text{Re})^{9/4}$  [9] (Moin, 1982). Временной шаг для разрешения течения в канале  $\Delta t \sim T_\eta = \sqrt{\nu / \varepsilon}$ ,  $n(\Delta t) \sim T_L / T_\eta \cong \text{Re}_L^{1/2}$ , поэтому  $\Delta t \sim 0,1 L / (U \cdot \text{Re}^{1/2})$ , и количество требуемых временных шагов для получения представительной картины турбулентности  $\sim \text{Re}_L^{11/4}$  [36] (Sagaut, 2007). К этому следует добавить необходимость применения численной схемы интегрирования уравнений NS высокого порядка аппроксимации как по времени, так по пространству, проблему формирования граничных условий и длительное время интегрирования для выхода течения на развитый турбулентный режим. Нетривиальным также является постпроцессинг, т. е. обработка результатов DNS моделирования.

Таблица 2 – Характерные размеры шага интегрирования DNS в продольном, поперечном и нормальном направлениях по данным [24, 36]

[24], Moin, Mahesh (1998)	по потоку	по нормали к стенке	поперек потока
однородный сдвиг	$\Delta X \sim 8\eta$	$\Delta Y \sim 4\eta$	$\Delta Z \sim 4\eta$
изотропная турбулентность	$\Delta X \sim 4,5\eta$	$\Delta Y \sim 4,5\eta$	$\Delta Z \sim 4,5\eta$

**LES разрешение турбулентности.** Вычислительная сетка LES может быть грубее, для изотропной турбулентности должна обеспечивать прямое разрешение ламинарно-турбулентного перехода и генерации турбулентности. Для LES в ядре квазиизотропного потока параметры сетки примерно те же. Для сдвиговых течений требования сеточного разрешения слабее, так как генерация турбулентности ассоциируется с толщиной сдвигового слоя  $\delta$ , поэтому  $\delta/100 < \Delta X < \delta/10$  независимо от числа Рейнольдса [13, 36].

**Требования к разрешению для пристенных течений** (табл. 3).

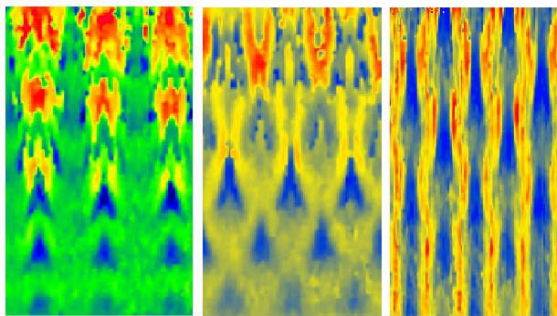
Таблица 3 – Рекомендуемые значения размеров сетки в пограничном слое для DNS и LES [11]

(Piomelli, Balaras) [11]	DNS	wall-LES
$\Delta X+$	10–15	50–100
$\Delta Y+$	5	10–20
$\Delta Z+$ (нормаль)	1	1
число точек в слое $0 < \Delta Z+ < 10$	3	3

DNS и LES разрешение пограничного слоя определяется разрешением стриков ("streaky"). Крупные масштабы имеют порядок толщины внешнего подслоя пограничного слоя. Масштаб генерации турбулентности во внутреннем подслое – вязкая длина

$$L = \nu / u_\tau, \quad u_\tau \sim u \sqrt{C_f}, \quad C_f \sim Re_L^{0,2}.$$

Количество точек в каждом измерении определяется возможностью разрешения "streaky" структур (рис. 5, рис. 6), которые в переменных стенке имеют постоянные размеры  $N_{BL} \sim Re_L^{0,9}$ . Физически необходимое количество временных шагов  $\sim Re_L^{0,6}$  (в пристенных областях масштаб событий зависит от Re [36]).



Klebanoff [6] Herbert [25] Kachanov [33]

Рис. 5 – Различные типы переходных ("streaky") структур во внутреннем слое [26] (Berlin et al., 1999, эксперимент)

В целом нужно заметить, что сетки для LES сильно анизотропны. Улучшение аппроксимации по нормали к стенке возможно благодаря совершенствованию моделей пристенных напряжений.

**Разрешение для акустики.** Типичные длины акустических волн существенно больше колмогоровского масштаба. Период гидродинамических флуктуаций  $T_f = L_t / u_t$ , масштаб гидродинамической турбулентной флуктуации (в инерционном диапазоне) составляет

$$L_t = T_f u_t = \left( T_f \sqrt{2\pi E (2\pi / L_t)} \right)^{2/3}, \text{ масштаб акустической турбулентной флуктуации составляет } L_a = T_f (u + c),$$

их отношение  $\frac{L_a}{L_t} = \frac{(u + c)}{u_t} > 1$ , поэтому акустические волны разрешаются в LES на применяемых или более грубых сетках (см. подробнее [36]).

**Разрешение (выделение) ударной волны для**

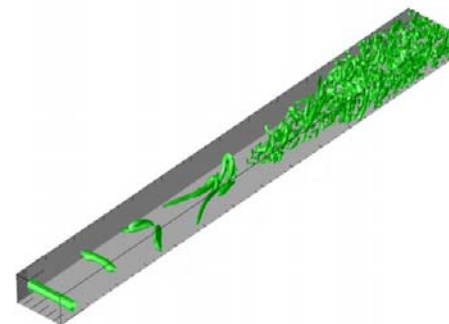


Рис. 6 – LES,  $\Lambda_2$ -критерий завихренности [27] (Jeong & Hussein, 1995)

**чисел Маха**  $1,2 < M < 1,5$  (табл. 4). По оценкам [24] колмогоровский размер на порядок больше толщины ударной волны  $\delta_{SHOCK}$

$$\frac{\eta}{\delta_{SHOCK}} \sim 0,13 \frac{M-1}{M_t} \sqrt{Re_\lambda},$$

здесь  $\lambda = \sqrt{2\nu \langle u'^2 \rangle / \varepsilon}$  – тейлоровский масштаб, в котором осреднение проводится по Рейнольдсу  $Re_\lambda \left( \sqrt{2\nu \langle u'^2 \rangle / \varepsilon} \right)$ ;  $M_t = f(\sqrt{K})$ ;  $K$  – турбулентная кинетическая энергия.

Отсюда следуют условия разрешения и выделения скачка уплотнения.

**Требования к аппроксимации вычислительной схемы для DNS.** Количество сеточных точек для разрешения события масштаба  $L$  является функцией численного метода. Оценка минимального отношения  $L/\Delta X$ , требуемого для



получения заданной точности на волновом тестовом решении  $f(x) = e^{ikx}$ , дана в табл. 5.

Численная схема модифицирует решение преобразованием  $k \Rightarrow k'(k, \Delta x)$ . По данным табл. 5 удовлетворительным выглядит 4–6 порядок аппроксимации численной схемы.

**О требованиях к аппроксимации вычислительной схемы для LES.** Требования к управлению ошибкой в LES более строгие из-за необходимости оценки энергии отсечения. Численные схемы вносят заметную искусственную диссипацию вследствие применения процедур противоточности, фильтрации, криволинейности сетки.

Центрально-разностные схемы для LES предпочтительны, т. к. имеют относительно малую диссипативную ошибку, вносят в решение в основном дисперсионную ошибку, которая явно не влияет на энергетический баланс SGS напряжений, что позволяет выделить более широкий диапазон масштабов. Вместе с тем, центрально-разностные схемы имеют узкий диапазон устойчивости и требуют применения процедуры искусственной стабилизации и применения неявных схем.

Табл. 6 иллюстрирует диапазон доминирования физически обоснованных моделей SGS напряжений, который возникает при малой численной погрешности схемы. Для неявных LES, в которых остаточные члены разностной схемы имеют структуру SGS тензора и доминируют над физической моделью SGS, последняя не применяется. Данное направление развивается, хотя имеет критиков.

**5. Две стратегии моделирования SGS напряжений.** В литературе существуют две основные

стратегии моделирования подсеточных рейнولدсовых напряжений – функциональное моделирование и структурное моделирование.

**Функциональное моделирование** состоит в моделировании действия SGS напряжений на поле скоростей, но не на SGS тензор напряжений.

**Структурное моделирование** состоит в наилучшей аппроксимации тензора SGS напряжений по оценке разрешаемого поля скоростей или с помощью формального разложения в ряды.

Данная классификация не устоялась, ей несколько лет. Другие подходы к классификации [1, 10, 12, 15, 23] характеризуются: а) уровнем сложности и точности аппроксимации SGS тензора; б) качеством описания каскадных процессов прямого и обратного рассеяния энергии; в) применением многоуровневого фильтрации; г) использованием стохастических методов в моделировании SGS; д) применением соображений, основанных на подобию масштабов.

Остановимся подробнее на функциональном моделировании для простейшего случая изотропной турбулентности. В основном это модели, основанные на разрешаемых масштабах.

Таблица 4 – Сеточные размеры для DNS и LES [28] (Ducros et al. 1999); [29] (Garnier, Sagaut, Deville 2001)

$\Delta x < \delta_{SHOCK} < \eta$	Разрешение скачка	DNS
$\delta_{SHOCK} < \Delta x < \eta$	Выделение скачка	DNS
$\delta_{SHOCK} < \eta < \Delta x$	Выделение скачка	LES

Таблица 5 – Количество сеточных точек для разрешения события на длине волны [7] (Lele, 1992)

$\epsilon = 1 - k' / k$	2-й порядок, явная схема	4-й порядок, явная схема	6-й порядок, явная схема	4-й порядок, неявная схема	6-й порядок, неявная схема
0,1	8	4,54	3,70	3,38	2,85
0,01	25	8,69	5,71	5,71	4
0,001	100	16,38	8,69	10	5,71

Таблица 6 – Диапазоны доминирования моделей SGS напряжений [7] (Lele, 1992)

Управляемая LES	$\epsilon_{num} \ll \epsilon_{sgs}$ ; физическая модель доминирует; явное SGS моделирование необходимо
Промежуточный случай	$\epsilon_{num} \sim \epsilon_{sgs}$ ; некоторые численные схемы (типа MiLES [30] (Boris, 1992), работают как SGS модель; явное SGS моделирование не оправдано
Неуправляемая LES = iLES	$\epsilon_{num} \gg \epsilon_{sgs}$ ; SGS моделирование не имеет смысла; результаты моделирования зависят от задачи

**Некоторые модели вихревой вязкости.**

**Линейная модель** [37] (Smagorinsky, 1963).

$\nu_t = (C_s \Delta)^2 (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$ , в которую заложена гипотеза локального равновесия или автоадаптации SGS к разрешаемым масштабам. Константа  $C_s = 0,18$  определяется из гипотезы Колмогорова. Модель основана на идее Буссинеска о вихревой вязкости, успешно и давно используемой в теории турбулентных замыканий. Вихревая вязкость  $\hat{\tau} = \nu_t \cdot \hat{S}$  применяется в упрощенном виде, ибо

показано, что она может быть тензором ([17], Yoshisava, 1989). Это простейшая модель, явно не зависящая от фильтра, имеет много недостатков: не универсальна, демонстрирует нефизичность колмогоровского спектра, не обеспечивает переход к DNS, не содержит обратного каскада.

**WALE-модель** [31] (Nikoud, 1993), является усовершенствованием предыдущей модели с вихревой

вязкостью в виде  $\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^5}$ ,

$\bar{S}^d = f(\bar{S}, \bar{\Omega})$ , забезпечує коректне асимптотичне описання вблизи стінки при безградієнтному погранслоє.

**Модель смішаних масштабів** [32] (Sagaut, 2002). Вихрева вязкість має вигляд  $\nu_t = (C_M \Delta)^{3/2} q_c^{1/4} (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$ , заснована на змішенні масштабів, застосовує повторний (неявний «тестовий») фільтр в вигляді рішення рівняння Лапласа  $q_c = 0,5(\bar{u} - \hat{u})^2$ ,  $\bar{u} - \hat{u} \sim \Delta \cdot \nabla^2 \bar{u}$ .

Обобщені моделі вихревої вязкості виконуються також на основі 2-х рівневого фільтрування. Історически першим представителем була **динамічна модель** [33] (Germano) побудована на основі тотожства Germano, зв'язуючого SGS тензори 2-х рівней фільтрування:

$$\underbrace{\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j}}_{L_{ij}} = \underbrace{\widehat{u_i u_j} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j}_{T_{ij}} - \underbrace{(\widehat{u_i u_j} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j)}_{\tau_{ij}}$$

Тотожство Germano призводить до тензору Леонарда (розрешаємого). Далі мінімізується нев'язка.

$$\tau_{ij} = C f_{ij}(\bar{u}, \Delta), \quad T_{ij} = C f_{ij}(\hat{u}, \hat{\Delta}), \\ r_{ij} = L_{ij} - C f_{ij}(\hat{u}, \hat{\Delta}) + C f_{ij}(\bar{u}, \Delta) \equiv L_{ij} - C M_{ij}.$$

Умова мінімізації  $\partial(r_{ij} r_{ij}) / \partial C = 0$ , де  $C = (L_{ij} M_{ij}) / (M_{ij} M_{ij})$ , обчислюється локально. Особливості даної моделі – автоматичне зникнення SGS тензора на стінці; автоматичний перехід до DNS; відображення перехідного процесу в пограничному шарі; з моделями вихревої вязкості динамічна процедура іноді дає  $C < 0$  – що може вказувати на зворотне розсіювання. Модель потребує стабілізації, розвитку моделі присвячено багато робіт. Динамічна процедура Germano використовується також для розвитку багатопараметричних моделей.

**Структурне моделювання** тензора SGS напружень заключається в найкращій апроксимації тензора по оцінці поля швидкостей або на основі формального розкладу в ряди. Данна стратегія не використовує апріорного знання про природу взаємодії SGS і розрешуваних масштабів.

Основна класифікація моделей в структурному моделюванні: а) моделі, отримані формальним розкладом тензора в ряди вблизи відсічення; б) моделі, що використовують гіпотезу подібності масштабів на різних рівнях фільтрування; в) змішані моделі, засновані на лінійній комбінації функціональних і структурних підходів; г) моделі на основі рівнянь переносу компонентів SGS тензора без урахування механізмів взаємодії.

Моделі наближеного обертання оператора фільтра розвиває школа [1] Berselli, et al., з різним порядком апроксимації. При цьому 6-й порядок вносить труднощі реалізації, але містить зворотний каскад.

**6. Особливості фільтрування NSE на реальних сітках.** Операція взяття частинної похідної від осередненого параметра по просторовій координаті в загальному випадку не комутативна [1]:

$$\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x} - \overline{\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}} = \int \psi(\xi, t) \frac{G(x - \xi)}{\partial x} d\xi.$$

Поэтому розглядаються два підходи:

1) фільтрування NSE в декартових координатах і наступне перетворення відфільтрованих рівнянь в обобщену систему координат призводить до комутуючих фільтрів з похибкою в похідних порядку  $O(\Delta)$ . Даний підхід розповсюджується на довільний порядок схеми при спеціальному виборі фільтра.

2) запис NSE в обобщених координатах і наступне фільтрування формально показує збереження апроксимації, але вносить проблеми незалежності метрики сітки.

Загальна теорія найкращої апроксимації і вибору характерного радіуса фільтра відсутня. Оптимізація LES рішення може бути також досягнута зміною констант в підсіткової моделі; перебудовою розрахункової сітки.

**Висновок.** Моделювання великих вихрей в турбулентності бурно розвивається і вже дає вагомі результати в додатках [15, 30, 36].

К нерешеним проблемам LES поряд з розвитком моделей SGS замикають слід віднести усунення чисельних ефектів, зв'язаних з анізотропією сіток, підвищення порядку точності різностіжних схем при оптимальному виборі типу апроксимації, рішення проблеми постановки граничних умов, зокрема моделі стінки. Особливою темою є моделювання SGS замикають для плазми, термодинамічних систем з хімічними реакціями і фазовими переходами.

**Список літератури.** 1. Berselli L. Mathematics of LES of Turbulent Flows / L. Berselli, T. Iliescu, W. Layton. – SC : Springer, 2006. – 348 p. 2. Berselli L. C. A higher-order subfilter-scale model for large eddy simulation / L. C. Berselli, T. Iliescu // J. Comput. Appl. Math. – 2003. – № 159 (2). – P. 411–430. 3. Blazek J. Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications / J. Blazek. – Elsevier, 2001. – 435 p. 4. Hinze J. O. Turbulence / J. O. Hinze – New-York : McGraw-Hill, 1975. – 790 p. 5. Kim J. Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number / J. Kim, P. Moin, R. Moser // Journ. Fluid Mech. – 1987. – № 177. – P. 133–166. 6. Klebanoff P. S. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient / P. S. Klebanoff // NACA Tech. Note, 3178. – 1956. 7. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution / S. K. Lele // Journal of Computational Physics. – 1992. – № 103. – P. 16–42. 8. Leonard A. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows / A. Leonard // Adv. in Geophysics. – 1974. – № 18A. P. 237–248. 9. Moin P. Numerical investigation of turbulent channel flow / P. Moin, J. Kim // Journ. Fluid Mech. – 1982. – № 118. – P. 341–377. 10. Moin P. Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport / P. Moin, K. Squires, W. Cabot [et al.] // Physics of Fluids. – 1991. № A3 (11). – P. 2746–2757. 11. Piomelli U. Wall-layer models for large-eddy simulations / U. Piomelli, E. Balaras // Annual Review of Fluid Mechanics. – Palo Alto, California : Annual Reviews. – 2002. – Vol. 34. – P. 349–374. 12. Piomelli U. Large-Eddy Simulation : Present State and Future Directions / U. Piomelli // AIAA Paper 98-0534. – 1998. 13. Pope S. Turbulent Flows / S. Pope. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 770 p. 14. Sagaut P. Large eddy simulation for incompressible flows. Scientific Computation / P. Sagaut. – Berlin :

Springer-Verlag. – 2001 p. 15. Schlatter P. Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow / P. Schlatter // PhD Thesis. – Zürich. – 2005. – ETH № 16000. 16. Truesdell C. A. Precise upper limit for the correctness of the Navier-Stokes theory with respect to the kinetic theory / C. A. Truesdell // Journ. of Statistic. Phys. – 1969. – Vol. 1, № 2. – P. 313. 17. Yoshizawa A. Subgrid-scale modeling with a variable length scale / A. Yoshizawa // Phys. Fluids. – 1989. № A1 (7). – P. 1293–1295. 18. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. – Москва : АН СССР. – 1941. – Т. 30. – С. 299–303. 19. Ландау Л. Теоретическая физика / Л. Ландау, Е. Лившиц. – Москва : Наука, 1986. – Т. 6. – 736 с. 20. Монин А. С. Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М. : Наука, 1965. – Ч. I. – 640 с. – 1967. – Ч. II. – 720 с. 21. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion / M. Van Dyke. – Stanford : Parabolic Press, 1982. – 180 p. 22. Солодов В. Г. Моделирование турбулентных течений. Расчет больших вихрей / В. Г. Солодов. – Харьков : ХНАДУ, 2011. – 167 с. 23. Drikakis D. Simulation of implicit LES / D. Drikakis, C. Fureby, F. F. Grinstein [et al.] // Journal of Computational Physics. – 2006. – № 213. – P. 413–436. 24. Moin P. DIRECT NUMERICAL SIMULATION: A Tool in Turbulence Research / P. Moin, K. Mahesh // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1998. – Vol. 30. – P. 539–578. 25. Herbert T. Secondary instability of boundary layers / T. Herbert // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1988. – Vol. 20. P. 487–526. 26. Berlin S. Numerical and experimental investigations of oblique boundary layer transition / S. Berlin, M. Wiegel, D. S. Henningson // Journ. Fluid Mech. – 1999. – № 393. – P. 23–57. 27. Jeong J. In the identification of a vortex / J. Jeong, F. Hussein // Journ. Fluid Mech. – 1995. – № 285. – P. 69–94. 28. Ducros F. Large-eddy simulation of shock/homogeneous turbulence interaction / F. Ducros, V. Ferrand, F. Nicoud [et al.] // Journ. Comp. Physics. – 1999. – № 152. – P. 517–549. 29. Garnier E. A class of explicit ENO filters with application to unsteady flows / E. Garnier, P. Sagaut, M. Deville // Journ. Comp. Physics. – 2001. – № 170. – P. 184–204. 30. Boris J. P. New insights into large-eddy simulation / J. P. Boris, F. F. Grinstein, E. S. Oran [et al.] // Fluid Dynamics Research. – 1992. – № 10. – P. 199–228. 31. Nicoud F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor / F. Nicoud, F. Ducros // Flow, Turbulence and Combustion. – 1993. – Vol. 62, № 3. – P. 183–200. 32. Sagaut P. Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction / P. Sagaut. – Berlin : Springer-Verlag. – 2002. 33. Germano M. Turbulence: The filtering approach / M. Germano // Journ. Fluid Mech. – 1992. – № 238. – P. 325–336. 34. Kachanov Y. S. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition / Y. S. Kachanov // Annual Review of Fluid Mechanics. – Vol. 26. – P. 411–482. 35. Klebanoff P. S. The three-dimensional nature of boundary layer instability / P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, L. M. Sargent // Journ. Fluid Mech. – 1962. – № 187. P. 61. 36. Wagner C. Large-Eddy Simulation for Acoustics / C. Wagner, T. Hüttl, P. Sagaut. – New-York : Cambridge University Press, 2007. – 441 p. 37. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations / J. Smagorinsky // Monthly Weather Review. – 1963. – Vol. 91, № 3. – P. 99–165.

**References.** 1. Berselli, L., T. Iliescu and W. Layton. *Mathematics of LES of Turbulent Flows*. SC: Springer, 2006. Print. 2. Berselli, L. C., and T. Iliescu. "A higher-order subfilter-scale model for large eddy simulation." *J. Comput. Appl. Math* 159.2 (2003): 411–430. Print. 3. Blazek, J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier, 2001. Print. 4. Hinze, J. O. *Turbulence*. New-York : McGraw-Hill, 1975. Print. 5. Kim, J., P. Moin and R. Moser. "Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number." *Journ. Fluid Mech* 177 (1987): 133–166. Print. 6. Klebanoff, P. S. "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer

with Zero Pressure Gradient." *NACA Tech. Note* 3178. 1956. Print. 7. Lele, S. K. "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution." *Journal of Computational Physics* 103 (1992): 16–42. Print. 8. Leonard, A. "Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows." *Adv. in Geophysics*. No. 18A. 1974. 237–248. Print. 9. Moin, P., and J. Kim. "Numerical investigation of turbulent channel flow." *Journ. Fluid Mech* 118 (1982): 341–377. Print. 10. Moin, P., et al. "Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport." *Physics of Fluids*. No. A3. 11. 1991. 2746–2757. Print. 11. Piomelli, U., and E. Balaras. "Wall-layer models for large-eddy simulations." *Annual Review of Fluid Mechanics* 34 (2002): 349–374. Print. 12. Piomelli, U. "Large-Eddy Simulation: Present State and Future Directions." *ALAA Paper* 98-0534. 1998. Print. 13. Pope, S. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Print. 14. Sagaut, P. *Large eddy simulation for incompressible flows. Scientific Computation*. Berlin: Springer-Verlag. Print. 15. Schlatter, P. "Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow." *PhD Thesis*. ETH No. 16000. Zürich. 2005. Print. 16. Truesdell, C. A. "Precise upper limit for the correctness of the Navier-Stokes theory with respect to the kinetic theory." *Journ. of Statistic. Phys.* 1.2 (1969): 313. Print. 17. Yoshizawa, A. "Subgrid-scale modeling with a variable length scale." *Physics of Fluids*. 1989. No. A1 (7). 1293–1295. Print. 18. Kolmogorov, A. N. "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds number." *Dokl. Akad. Nauk USSR*. Vol. 30. Moscow: AN USSR, 1941. 9–13. Print. 19. Landau, L., and E. Livshits. *Theoretical physics*. Vol. 6. Moscow: Nauka, 1986. Print. 20. Monin, A. C., and A. M. Yaglom. *Statistical Hydromechanics*. Vol. I. Moscow: Nauka, 1965. Vol. II. Moscow: Nauka, 1967. Print. 21. Van Dyke, M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford: Parabolic Press, 1982. Print. 22. Solodov, V. G. *Turbulent flow simulation. The calculation of large eddies*. Kharkov: HNADU, 2011. Print. 23. Drikakis, D., et al. "Simulation of . implicit LES." *Journal of Computational Physics* 213 (2006): 413–436. Print. 24. Moin, P., and K. Mahesh. "DIRECT NUMERICAL SIMULATION: A Tool in Turbulence Research." *Annual Review of Fluid Mechanics* 30 (1998): 539–578. Print. 25. Herbert, T. "Secondary instability of boundary layers." *Annual Review of Fluid Mechanics* 20 (1988): 487–526. Print. 26. Berlin, S., M. Wiegel and D. S. Henningson. "Numerical and experimental investigations of oblique boundary layer transition." *Journ. Fluid Mech.* 393 (1999): 23–57. Print. 27. Jeong, J., and F. Hussein. "In the identification of a vortex." *Journ. Fluid Mech.* 285 (1995): 69–94. Print. 28. Ducros, F., et al. "Large-eddy simulation of shock/homogeneous turbulence interaction." *Journ. Comp. Physics* 152 (1999): 517–549. Print. 29. Garnier, E., P. Sagaut and M. Deville. "A class of explicit ENO filters with application to unsteady flows." *Journ. Comp. Physics* 170 (2001): 184–204. Print. 30. Boris, J. P., et al. "New insights into large-eddy simulation." *Fluid Dynamics Research*. No. 10. 1992. 199–228. Print. 31. Nicoud, F., and F. Ducros. "Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor." *Flow, Turbulence and Combustion* 62.3 (1993): 183–200. Print. 32. Sagaut, P. *Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. Print. 33. Germano, M. "Turbulence: The filtering approach." *Journ. Fluid Mech.* 238 (1992): 325–336. Print. 34. Kachanov, Y. S. "Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition." *Annual Review of Fluid Mechanics* 26: 411–482. Print. 35. Klebanoff, P. S., K. D. Tidstrom and L. M. Sargent. "The three-dimensional nature of boundary layer instability." *Journ. Fluid Mech.* 187 (1962): 61. Print. 36. Wagner, C., T. Hüttl and P. Sagaut. *Large-Eddy Simulation for Acoustics*. New-York: Cambridge University Press, 2007. Print. 37. Smagorinsky, J. "General circulation experiments with the primitive equations." *Monthly Weather Review* 91.3 (1963): 99–165. Print.

Надійшла (received) 10.10.2015

**Солодов Валерій Григорьевич** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Гідрравлічні машини», г. Харків; тел.: (057) 707-66-46; e-mail: solodov.v@gmail.com.

**Solodov Valeriy Grigorievich** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Professor at the Department of "Hydraulic machines", Kharkov; tel.: (057) 707-66-46; e-mail: solodov.v@gmail.com.