УДК 531

С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, асп., НТУ «ХПИ»

ОБ ЭФФЕКТЕ ЗАВИСАНИЯ МЕЛКОЙ ЧАСТИЦЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ

Описано рух сферичної частки, що зменшує радіус за показниковим законом, нелінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. За допомогою спеціального перетворення знайдено аналітичний розв’язок задачі Коші в функціях Бесселя. Встановлено ефект зависання дрібної частки змінної маси в повітряному шарі обмеженої товщини.

The motion of a spherical particle is described which reduces radius under the exponential law, nonlinear differential equation with variable factors. Through special transformation the analytical solution of a Cauchy problem in Bessel functions is found. The fact of hover of a fine particle of variable mass in air environment under condition of infinite existence in time is established.

Актуальность темы и цель исследования. В природе и технике нередко приходится видеть движение тел переменной массы, например, различных типов ракет, масса которых уменьшается в процессе сгорания топлива [1]. Изменение массы может происходить также в ходе перемещения элементов механической системы (намотке нитей или канатов на барабаны) [2], при испарении движущихся капель в газовой среде, при полете в атмосфере горящих частиц твердого топлива [3], метеоритов [1] и пр. С помощью моделей движения частиц переменной массы можно описывать движение капель образующих туманы [4].

Движение легких частиц в газовой среде сопровождается рядом особенностей, в частности наличием эффекта отражения легкой частицы встречным потоком [5], а также наличием экстремума скорости, характерного только при движении малой частицы переменной массы [6,7].

Построение аналитического решения уравнения движения существенно усложняется в случае нелинейных задач [5]. Ниже рассматривается одна из таких задач.

Основные обозначения и допущения при составлении уравнения движения. Исследование проведем в предположении, что сила аэродинамического сопротивления пропорциональна площади миделевого сечения и квадрату скорости падения шара в воздухе. Плотность шара принимаем постоянной. Поэтому уменьшение его радиуса сопровождается также уменьшением его массы и возрастанием удельной силы аэродинамического сопротивления.

Изменение радиуса тела подчиним показательному закону

$$r(t) = r_0 \exp(-\lambda t), \tag{1}$$

где r_0 – начальный радиус тела; λ – коэффициент, определяющий скорость уменьшения радиуса во времени t.

Заметим, что движение материальной точки, у которой изменялась масса по показательному закону, рассматривалось в работах [1], [8] и других исследованиях. В отличие от указанных публикаций здесь рассматривается полет тела переменных размеров и массы.

В рамках принятых допущений изменение скорости падения тела υ во времени t описывается нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{k}{r}\upsilon^2 = g\,. \tag{2}$$

Здесь k – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления; g – ускорение свободного падения; r – подчиняется закону (1).

Значение начальной скорости падения тела принимаем равным υ_0. Поэтому решение уравнения (2) должно удовлетворять начальному условию

$$\upsilon(0) = \upsilon_0. \tag{3}$$

Замкнутое решение задачи Коши в функциях Бесселя. Для нахождения решения уравнения (2) вводим новую безразмерную переменную

$$\xi = \exp(\lambda t)\,; \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi\,. \tag{4}$$

Учитывая, что, согласно (4)

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi\frac{d}{d\xi}\,,$$

представляем (2) в виде

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} + \beta\upsilon^2 = \frac{g_1}{\xi}\,, \tag{5}$$

где $g_1 = \frac{g}{\lambda}$; $\beta = \frac{k}{\lambda r_0}$.

Чтобы избавится в (5) от нелинейности, используем преобразование

$$\upsilon = \frac{1}{\beta}\frac{dw}{d\xi}w^{-1}\,, \tag{6}$$

в котором $w(\xi)$ неизвестная вспомогательная функция.

Подставив выражение (6) в (5), приходим к линейному уравнению типа Бесселя

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\beta_1}{\xi}w = 0\,, \tag{7}$$

где $\beta_1 = \beta g_1$.

Общим решением (7) есть

$$w = \sqrt{\xi}\left(c_1 I_1(\eta) + c_2 K_1(\eta)\right), \tag{8}$$

где $\eta = 2\sqrt{\beta_1\xi}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_1(z)$, $K_1(z)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и Макдональда индекса единица.

Учитывая принятые выше обозначения, после постановки (8) в (6), получаем общее решение уравнения (2)

$$\upsilon(\eta)=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\beta_1}{\xi}}\frac{cI_0(\eta)-K_0(\eta)}{cI_1(\eta)+K_1(\eta)}, \tag{9}$$

где $c=c_1c_2^{-1}$ – произвольная постоянная.

Константу c в (9) определяем из условия (3), что дает

$$c=\frac{\upsilon_0\beta K_1(\eta_0)+\sqrt{\beta_1}K_0(\eta_0)}{\sqrt{\beta_1}I_0(\eta_0)-\upsilon_0\beta I_1(\eta_0)}; \quad \eta_0=2\sqrt{\frac{\beta g}{\lambda}}. \tag{10}$$

При увеличении времени полета независимо от υ_0, графики изменения скорости приближаются к одной линии, которая аналитически представляется выражением

$$\upsilon_a(t)=\sqrt{\frac{gr_0}{k}}\exp(-0{,}5\lambda t). \tag{11}$$

К нему приходим из решения (9), заменив там цилиндрические функции их асимптотическими выражениями при больших значениях аргумента [9]

$$I_0(\eta)\sim I_1(\eta)\sim\frac{e^{\eta}}{\sqrt{2\pi\eta}};\ K_0(\eta)\sim K_1(\eta)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2\eta}e^{-\eta}}\ .$$

Для определения максимального расстояния, пролетаемого частицей за время ее существования необходимо вычислить сходящийся несобственный интеграл вида

$$\max S=\int_0^{\infty}\upsilon(t)dt\ . \tag{12}$$

Для подынтегральной функции (9) его не удается выразить в аналитическом виде с помощью известных функций.

Чтобы упростить численное интегрирование в (12) представим его в виде

$$\max S=\int_0^{\infty}\upsilon_a(t)+\int_0^{\infty}[\upsilon(t)-\upsilon_a(t)]dt\ . \tag{13}$$

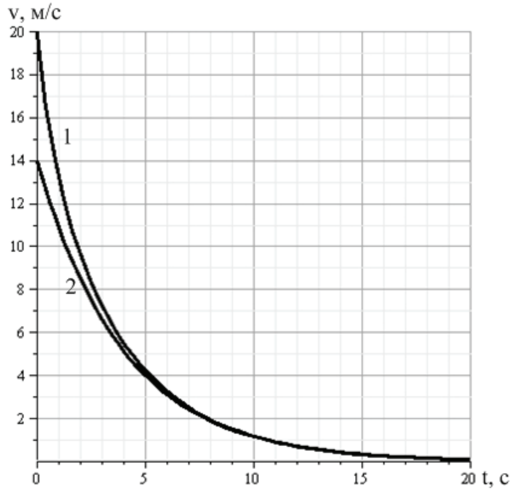
Асимптотика (11) позволяет первое слагаемое в (13) выразить через элементарные функции. Поэтому

$$\max S=\frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{gr_0}{k}}+\int_0^{\infty}[\upsilon(t)-\upsilon_a(t)]dt\ . \tag{14}$$

Несобственный интеграл в (14) с заданной погрешностью ε можно заменить обычным определенным интегралом и проводить его вычисление на компьютере. Для контроля точности вычислений можно использовать правило Рунге.

Результаты расчетов. Сравним точное (9) и асимптотическое решения (11) для скорости частицы. Для этого проведем расчет при $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $k = 10^{-4}$; $\lambda = 0{,}5$ с$^{-1}$; $\upsilon_0 = 20$ м/с.

Результаты расчетов, представленные на рисунке подтверждают то, что при росте времени аналитическое решение (9) (кривая 1) стремится к асимптотике (11) (кривая 2).



Зависимости скорости от времени, полученные различными способами

Дальше определим перемещение тела по формуле (14). В таблице представлены величины пролетаемого телом пути S_{max} при различных начальных скоростях υ_0, вычисление с погрешностью меньшей 10^{-3} м.

Величины пролетаемого частицей пути S_{max} для различных начальных скоростей

υ_0, м/с	5	10	15	20	25	30
max$S$, м по форм (14)	53,77	57,80	60,56	63,18	65,44	67,45

Исходя из результатов в таблице, следует отметить, что величины пролетаемого частицей пути при различных начальных скоростях мало отличается друг от друга. Шестикратное увеличение υ_0 увеличило max$S$ только на 20 процентов.

Частица, радиус которой убывает по показательному закону, пролетает конечное расстояние max$S$ за время ее существования. Она зависает в газовом слое высотой max$S$, то есть за бесконечное время полета не может преодолеть большего расстояния. Поскольку в природе (туманы, дымовые завесы и пр.) зависание длиться на конечном интервале времени изложенная теория может быть использована для описания начального этапа этого явления.

Выводы. Решение дифференциального уравнения вертикального падения тела, радиус которого уменьшается по показательному закону, выражается в модифицированных функциях Бесселя. Частица пролетает конечное расстояние и после этого зависает в воздухе на бесконечное время. Такое явление обусловлено экспоненциальным законом уменьшения радиуса и массы частицы.

Список литературы: **1.** *Циолковский К.Э.* Собр. соч. т. II, АН СССР. – 1954. **2.** *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. **3.** *Фукс Н.А.* Испарение и рост капель в газообразной среде. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1958. – 92 с. **4.** *Грин Х., Лейн В.* Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. – Ленинград: Химия, 1969. – 428 с. **5.** *Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. **6.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Об условиях экстремума скорости падения сферического тела переменного радиуса // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии. – Вып. 26. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – С. 67-78. **7.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25-29. **8.** *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с. **9.** *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям(с формулами, графиками и математическими таблицами) – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 03.09.2009