

*Н.И.ВОРОПАЙ*, аспирант, ХНАДУ, Харьков

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА**

Збудовано розв'язок оберненої задачі на основі розв'язку прямої задачі про дослідження нестационарних коливань пружної ізотропної середі з циліндричною порожниною. Поширення осесиметричних деформаційних хвиль зумовлено завданням переміщень на поверхні порожнини у пружному тілі. Приведено числовий приклад розрахунку оберненої задачі.

The inverse problems solution based on the direct problem of non-stationary vibrations of an elastic isotropic medium with a cylindrical cavity is considered. Distribution of axisymmetric deformation waves which are caused by displacements on the surface of an elastic body. A numerical calculations' example for the inverse problem are presented.

Построено решение обратной задачи на основе прямой задачи об исследовании нестационарных колебаний упругой изотропной среды с цилиндрической полостью. Распространение осесимметричных деформационных волн обусловлено заданием перемещений на поверхности полости в упругом теле. Представлен численный пример расчета обратной задачи.

**Введение.** Зачастую, точность расчетов сооружений и машин на динамическую прочность, существенным образом зависит от полноты информации о воздействующих нагрузках (законов изменения их во времени и максимальных значений). Причем нагружения могут быть как кинематического, так и силового характеров.

Разработка методик решения обратных задач и соответствующих алгоритмов позволяет эффективно идентифицировать (восстановить) неизвестный закон изменения во времени нагрузок, воздействующих на элементы конструкций, а также находить их максимальных значений на основе известного в некоторых точках напряженно-деформируемого состояния (НДС) этих элементов [9, 10].

**Анализ публикаций.** Первые работы по обратным задачам в механике деформируемого твердого тела появились в начале XX века. Более интенсивно разработки в этой области математической физики начали проводиться в 70-80-е годы прошлого века и продолжают до настоящего времени. Повидимому, их интенсивное развитие стало возможным в связи со значительными достижениями в области вычислительной техники и вычислительной математики [2, 7, 11].

В настоящей статье предложена методика решения обратной задачи, целью которой является определение перемещений на поверхности цилиндрической полости при условии, что известен закон изменений перемещений во времени в некоторой точке упругого пространства.

Решение обратной задачи базируется на решении соответствующей пря-

мой задачи, которая заключается в отыскании изменений перемещений во времени в упругой среде при заданном изменении перемещений на поверхности цилиндрической полости. Различные подходы к решению указанной прямой задачи, а также достоверность полученных результатов, отражены в работах Барона и Парнеса [1], сотрудников Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины [4] и Е.Г. Янютина [8].

В настоящей работе решение обратной задачи будем строить на основе результатов, представленных в работе Е.Г. Янютина [8], в предположении постоянства радиуса цилиндрической полости.

**Постановка задачи.** Пусть в упругом пространстве, содержащем цилиндрическую полость радиуса  $R_0$ , известен закон изменения перемещений во времени (рис. 1). Деформация среды и соответственно указанное перемещение вызывается некоторым кинематическим нагружением пространства на поверхности полости ( $r = R_0$ ), находящейся в нем (рис. 1). Необходимо определить это кинематическое возмущение (радиальное перемещение), приложенное к поверхности полости. Для этого будем использовать известное перемещение в точке  $r^*$ .

**Решение задачи.** Укажем еще раз, что за основу, для построения решения обратной задачи, были использованы результаты из монографии [8], в которой можно найти подробное описание построения решения прямой задачи. Методика построения такого рода задач представлена также и в более поздней работе [9]. Опишем кратко соответствующее решение.

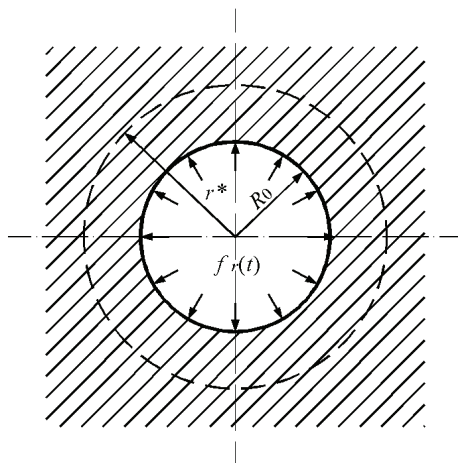


Рисунок 1 – Расчетная схема для решения обратной задачи

Уравнения, отражающие плоское нестационарное неосесимметричное деформирование упругого пространства в цилиндрических координатах

$(r, \theta, z)$  [5] имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе;  $\Delta$  – объемное расширение;  $\omega_z$  – проекция вектора вращения на ось  $z$ ;  $u_r$  и  $u_\theta$  – радиальное и окружное перемещения точек среды соответственно. Причем,

$$\Delta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (2)$$

Решение задачи строится с нулевыми начальными условиями

$$u_r|_{t=0} = u_\theta|_{t=0} = \frac{\partial u_r}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

и при следующих граничных условиях

$$u_r|_{r=R_0} = f_r(\theta, t); \quad u_\theta|_{r=R_0} = f_\theta(\theta, t); \quad u_r|_{r=\infty} = u_\theta|_{r=\infty} = 0, \quad (4)$$

где  $f_r(\theta, t)$ ,  $f_\theta(\theta, t)$  – заданные функции, описывающие изменение радиальных и окружных перемещений, на поверхности бесконечного цилиндра, находящегося внутри упругого пространства.

При формулировке (4) указано, что при  $r = +\infty$  возмущения в упругой среде отсутствуют.

В результате решения уравнений (1) и (2) [8, 9] с учетом условий (3) и (4) получим выражения, которые позволяют рассчитать перемещения  $u_r$  и  $u_\theta$  в любой точке упругого пространства с цилиндрической полостью при кинематическом нагружении на его поверхности в условиях плоского неосесимметричного деформирования:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 H(t-t_i) \int_0^{t-t_i} C_{i_n}(\tau) \cdot \sum_{j=1}^3 A_{ji} \frac{\partial}{\partial \tau} F_{ji_n}(r, t-t_i-\tau) d\tau \cdot \cos(n\theta); \\ u_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 H(t-t_i) \int_0^{t-t_i} C_{i_n}(\tau) \cdot \sum_{j=1}^3 B_{ji} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{ji_n}(r, t-t_i-\tau) d\tau \cdot \sin(n\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$t_1 = \frac{r-R_0}{b}; \quad t_2 = \frac{r-R_0}{a};$$

$$A_{11} = \frac{2b^2 n}{r}; \quad A_{12} = a; \quad A_{22} = \frac{a^2 n}{r}; \quad A_{21} = A_{31} = A_{32} = 0;$$

$$F_{11_n}(r, t) = f_n^* \left( \frac{r}{b}, t \right); \quad F_{12_n}(r, t) = f_{n-1}^* \left( \frac{r}{a}, t \right); \quad F_{22_n}(r, t) = f_n^* \left( \frac{r}{a}, t \right);$$

$$\begin{aligned}
F_{21_n}(r, t) &= F_{31_n}(r, t) = F_{32_n}(r, t) = 0; \\
B_{11} &= 2b; B_{12} = \frac{a^2 n}{r}; B_{21} = \frac{2b^2 n}{r}; B_{22} = B_{31} = B_{32} = 0; \\
G_{11_n}(r, t) &= f_{n-1}^* \left( \frac{r}{b}, t \right); G_{12_n}(r, t) = f_n^* \left( \frac{r}{b}, t \right); G_{21_n}(r, t) = f_n^* \left( \frac{r}{a}, t \right); \\
G_{22_n}(r, t) &= G_{31_n}(r, t) = F_{32_n}(r, t) = 0; \\
f_n^*(r, t) &= \int_0^t f_n(r, \tau) d\tau; f_n(r, t) = \frac{\sqrt{\pi}(t^2 + 2rt)^{n-1/2}}{(2r)^n \Gamma(n+1/2)},
\end{aligned}$$

причем  $H(t)$  – функция Хевисайда;  $a^2 = (\lambda + \mu)/\rho$ ;  $b^2 = \mu/\rho$  – скорости соответственно продольных и поперечных волн возмущений, возникающих в материале среды;  $\Gamma(n)$  – гамма-функция.

Пример расчета обратной задачи проводится для случая, отвечающего осесимметричному плоскому деформированию упругого пространства с цилиндрической полостью, то есть  $n = 0$  в разложениях (5). В этом случае, решение задачи строится на основе следующего выражения

$$u_r = \frac{a^2}{r} H(t - t_2) \int_0^{t-t_2} C(\tau) \sqrt{(t - t_2 - \tau)^2 + 2 \frac{r}{a} (t - t_2 - \tau)} d\tau, \quad (6)$$

которое решается относительно неизвестной функции  $C(t)$ . При этом предполагается, что функция  $u_r(t)$  является известной функцией времени в точке  $r = r^*$ .

Таким образом, нестационарная обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтера I рода, а радиальные перемещения, которые необходимо задать на поверхности цилиндрической поверхности упругого пространства, чтоб получить соответствующие перемещения в произвольной точке упругого пространства определяются как:

$$u_r^{R_0} = \frac{a^2}{R_0} \cdot \int_0^t C(\tau) \sqrt{(t - \tau)^2 + 2 \frac{R_0}{a} (t - \tau)} d\tau. \quad (7)$$

Поскольку задача является псевдокорректной, то есть некорректной по Адамару, но корректной по Тихонову [6], то не требуется применять специальных устойчивых методов.

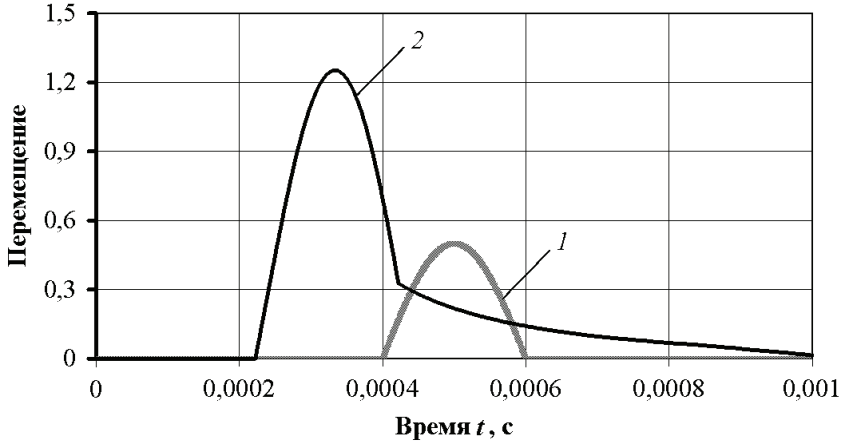
Для решения уравнения (7) применялся численный подход, который состоит во введении аппроксимирующих выражений [3, 9] для искомых функций по формуле:

$$y(t) = \sum_{p=1}^m y_p \left( H(t - t_{p-1}) - H(t - t_p) \right), \quad (8)$$

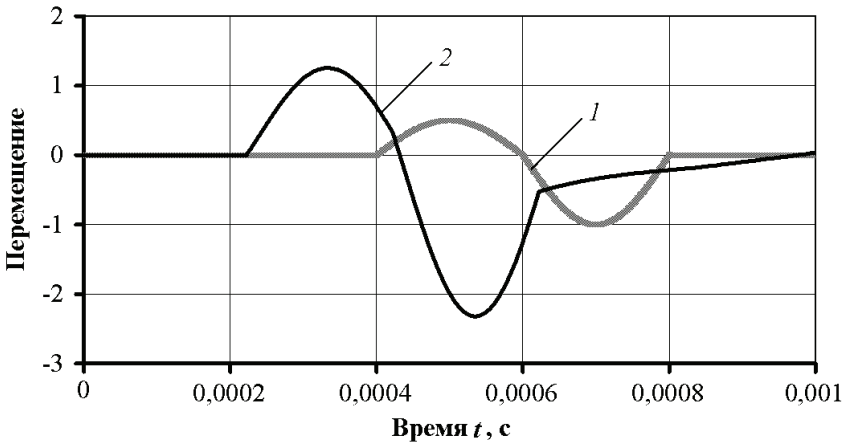
где  $y_p = \text{const}$ ;  $t_p = p \cdot \Delta t$ ;  $\Delta t = T/M$  – шаг во времени;  $M$  – целое положи-

тельное число;  $m = 1 \dots M$  – число шагов во времени.

Подставляя аппроксимирующие формулу (8) в уравнения (6) получим выражения, из которых находятся неизвестная функция  $C(t)$  в дискретной форме, после чего, подставляя их значения в (7), и найдем радиальные перемещения, вызывающие распространение осесимметричных упругих волн от круговой полости в однородной упругой среде.



a



б

Рисунок 2 – Изменение во времени радиальных перемещений

**Численные результаты.** Численный расчет задачи проводился для следующих параметров:  $R_0 = 0,3$  м,  $E = 2,058 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Было рассмотрено два случая кинематического нагружения

пространства. На рис. 2, *а*, *б* представлены кривые изменения перемещений во времени соответственно. Причем, кривая 1 соответствует известному закону изменению перемещений в точке  $r^* = 1,2$  м, а кривая 2 – это восстановленные перемещения на цилиндрической поверхности, которые вызывают заданные перемещения.

**Выводы.** Указанная методика решения обратной задачи является достаточно эффективной, о чем свидетельствует приведенные результаты.

**Список литературы:** 1. Барон, Парнес. Определение перемещений и скоростей точек среды при дифракции волны давления на цилиндрической полости в упругой среде // Прикладная механика. Сер. Е. – 1962. – Т. 29, № 2. – С. 183-193. 2. Ватulyян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: 2007. – 224 с. 3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: 1986. – 544 с. 4. Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – Т. 5. Динамика упругих тел. – К.: 1986. – 288 с. 5. Ляв А. Математическая теория упругости. – Л.: 1935. – 674 с. 6. Петров Ю.П., Сизиков В.С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. – СПб.: 2003. – 261 с. 7. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: 2009. – 480 с. 8. Янютин Е.Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – К.: 1993. – 147 с. 9. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Вороний А.В., Шараната А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Х.: 2004. – 392 с. 10. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Вороний Н.И., Гнатенко Г.А., Гришакин В.Т. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. В 2-х частях. – Часть I. – Х.: 2010. – 180 с. 11. Ramm A.G. Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. – Springer, 2005. – 462 p.

Поступила в редколлегию 15.07.2011