**Bibliography (transliterated): 1.** Shuklinov S. N. Matematicheskoe modelirovanie rabochih protsessov mehanizma pod'ema kabinyi gruzovogo avtomobilya. S.N.Shuklinov, M.Yu.Zalogin, P.R.Bartoshю Pratsi odeskogo natsionalnogo universitetu. 2014. № 2 (44). 39-44. Print. **2.** Dhruvil K. Design of hydraulic for cab tilting system / K. Dhruvil, B. Saurabh // International conference on advanced in mechanical engineering (ICARME-2012). 2012. 51-55. Print. **3.** Cab tilt hydraulic system. Operation manual and service instructions [Elektronnyi resurs] / Pawer Packer – Rezhim dostupa: www.powerpackerus.com. **4.** Lamb, H. Hydrodynamics / H. Lamb. 2nd ed. Miami: HardPress Publishing, 2012. 622 p. Print. **5.** Cho, B.-H. Estimation Technique of Air Content in Automatic Transmission Fluid by Measuring Effective Bulk Modulus. B.-H. Cho, H.-W. Lee, J.-S. Oh. International Journal of Automotive Technology. 2002. Vol. 3, Iss. 2. 57-61. Print. **6.** Dyakonov V. P. Simulink 5/6/7. Samouchitel. V. P. Dyakonov. M.: DMK-Press, 2008. 784 p. Print. **7.** GOST R 53807-2010. Avtomobilnyie transportnyie sredstva. Gidrotsilindryi i nasosyi gidravlicheskih mehanizmov oprokidyivaniya kabin. Tehnicheskie trebovaniya i metodyi ispyitaniy. Moskva: Natsionalnyiy standart Rossiyskoy Federatsii, 2010. Print.

*Надійшла (received) 06.10.2014*

УДК 539.3

***А. Н. ШУПИКОВ***, д-р техн. наук, зав. отделом, ИПМаш НАН Украины;
***Е. В. СВЕТ***, канд. техн. наук, старш. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

На основе метода погружения, получено решение задачи нестационарной теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных цилиндрических оболочек сложной формы в плане при нагревании пленочным межслойным источником тепла. Проведено сравнение с результатами, полученными в ходе проведения термографического исследования многослойной цилиндрической оболочки, которое подтверждает достоверность результатов, полученных на основе предлагаемого подхода. Сравнение приведено для различных моментов времени.

**Ключевые слова:** теплопроводность, многослойная оболочка, сложная форма, источник тепла, термографическое исследование.

**Введение.** Анализ литературных источников показывает, что достаточно полно изучены вопросы теплопроводности многослойных пластин и оболочек, имеющих каноническую форму в плане, на наружных поверхностях которых осуществляется конвективный теплообмен [1, 2]. Для оболочек неканонической формы, в основном, применяются МКЭ и R-функции [3, 4]. Как правило, внутренние источники тепла, в рассматриваемых объектах, отсутствуют.

Поэтому развитие методов расчета нестационарных полей температуры в многослойных оболочках, имеющих сложную форму в плане, при конвективном теплообмене на наружных поверхностях и наличии распределенных пленочных межслойных источников тепла представляет собой актуальную задачу.

В публикации [5] подобная задача решена на основе двумерной теории, а в [6, 7] – на основе трехмерной теории, для многослойных пластин. В данной работе предлагается подход, основанный на трехмерной теории, для многослойных оболочек.

**Постановка задачи.** Рассматривается многослойная цилиндрическая оболочка, собранная из $I$ слоев постоянной толщины $h_i$, отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1).

На координатной плоскости оболочка занимает область Ω, ограниченную контуром $L: x_L = x(s)$, $y_L = y(s)$. На внешних $S_0$, $S_I$ и боковой $\left( S_L = \sum_{i=1}^{I} S_L^i \right)$ поверхностях оболочки происходит конвективный теплообмен.

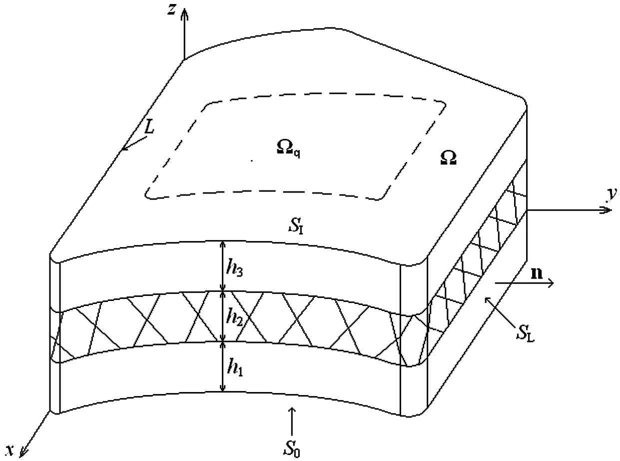

Рисунок 1 – Многослойная оболочка

Распределение температуры в слоях оболочки определяется:

– уравнением

$$-\frac{\rho_i c_i}{k_i}\dot{T}^i + \Delta_R T^i = -\frac{Q^i}{k_i}; \quad \Delta_R = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_z^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{RR_z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad R_z = 1 + \frac{z}{R};$$

$$(x, y) \in \Omega; \quad \delta_{i-1} \le z \le \delta_i; \quad i = \overline{1, I}, \tag{1}$$

где $i$ – номер слоя, $\delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$ , $h_j$ – толщина $j$-го слоя, $T^i$ – температура $i$-го слоя, $Q^i$ – внутренний источник тепла $i$-го слоя, $\rho_i$ – плотность материала $i$-го слоя, $c_i$ – теплоемкость материала $i$-го слоя, $k_i$ – коэффициент теплопроводности материала $i$-го слоя, $R$ – радиус кривизны поверхности $\Omega$;

– граничными условиями на боковой поверхности

$$\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} + \frac{H_L^i}{k_i}(T^i - T_L^i) = 0, \ (x, y, z) \in S_L^i, \qquad (2)$$

где $T_L^i$ – температура на боковой поверхности $i$-го слоя, $H_L^i$ – коэффициент конвективного теплообмена на боковой поверхности $i$-го слоя;

– условиями конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки

$$-\frac{\partial T^1}{\partial z} + \frac{H_1}{k_1}(T^1 - T_\infty^1) = 0; \quad z = 0; \qquad \frac{\partial T^I}{\partial z} + \frac{H_I}{k_I}(T^I - T_\infty^I) = 0, \ z = \delta_I, \qquad (3)$$

где $T_\infty^1$ и $T_\infty^I$ – температура среды на границе с первым и $I$-м слоем, $H_1$ и $H_I$ – коэффициенты конвективного теплообмена на наружной и внутренней поверхности пакета соответственно.

– начальными условиями

$$T^i = T_0^i; \quad t = 0.$$

Условия равенства потоков тепла и температур на границах контакта соседних слоев, с учетом возможных тепловых воздействий на поверхностях слоев, запишем как

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial z} + k_{i+1}\frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} - q_i = 0; \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i, \qquad (4)$$

где

$$q_i = \begin{cases} q_i^0, \ x_1 \le x \le x_2, \ y_1 \le y \le y_2, \\ 0, \quad 0 \le x < x_1, \ x_2 < x \le A, \ 0 \le y < y_1, \ y_2 < y \le B; \end{cases}$$

$q_i^0$ – тепловой поток, возникающий от действия пленочного источника тепла, расположенного на границе контакта соседних слоев.

Производные искомой функции по поперечной координате $z$, входящие в уравнения (1), а также условия (3) и (4), заменим их конечно-разностным представлением. Для этого используются симметричные разности [8]

$$\frac{\partial T_r^i}{\partial z} = \frac{T_{r+1}^i - T_{r-1}^i}{2\Delta_{h_i}}; \qquad \frac{\partial^2 T_r^i}{\partial z^2} = \frac{T_{r+1}^i - 2T_r^i + T_{r-1}^i}{\Delta_{h_i}^2},$$

где $\Delta_{h_i} = \frac{h_i}{r_i}$ – шаг сетки, $r_i + 1$ – количество узлов в $i$-том слое, $T_r^i$ – значение искомой функции в $r$-м узле $i$-го слоя.

В результате система уравнений (1) принимает вид

$$-\Delta_{h_i}^2 \frac{\rho_i c_i}{k_i}\dot{T}_r^i+\left(1-\frac{\Delta_{h_i}}{2RR_r^i}\right)T_{r-1}^i-\left(2+\Delta_{h_i}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\left(R_r^i\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right)T_r^i+$$

$$+\left(1+\frac{\Delta_{h_i}}{2RR_r^i}\right)T_{r+1}^i=-\frac{\Delta_{h_i}^2}{k_i}Q_r^i;\qquad R_r^i=1+\frac{\delta_{i-1}+r\Delta_{h_i}}{R}. \tag{5}$$

Условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки (3) и условия на границе контакта соседних слоев (4) выглядят так:

$$-\left(\frac{T_1^1-T_{-1}^1}{2\Delta_{h_1}}\right)+\frac{H_1}{k_1}(T_0^1-T_\infty^1)=0,\ z=0;$$

$$\left(\frac{T_{r_I+1}^I-T_{r_I-1}^I}{2\Delta_{h_I}}\right)+\frac{H_I}{k_I}(T_{r_I}^I-T_\infty^I)=0,\ z=\delta_I; \tag{6}$$

$$k_i\left(\frac{T_{r_i+1}^i-T_{r_i-1}^i}{2\Delta_{h_i}}\right)+k_{i+1}\left(\frac{T_1^{i+1}-T_{-1}^{i+1}}{2\Delta_{h_{i+1}}}\right)-q_i=0,\quad T^i=T^{i+1},\quad z=\delta_i, \tag{7}$$

Условия (6) и (7) позволяют исключить из системы (5) значения искомых функций в узловых точках с номерами: $r=-1$ и $r=r_i+1$ в $i$-м слое ($i=\overline{1,I}$), а также с номерами $r$ = 0 (во всех слоях, кроме 1-го).

Получаем систему уравнений вида

$$[G]\dot{\mathbf{T}}=-[A]\mathbf{T}+\mathbf{B}+[C]\mathbf{Q}. \tag{8}$$

Для решения системы (8) применяется подход, аналогичный методу погружения [9]. Исходная многослойная оболочка произвольной формы в плане погружается во вспомогательную охватывающую многослойную оболочку с той же композицией слоев. Форма в плане охватывающей оболочки выбирается таким образом, чтобы возможно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе роль охватывающей оболочки выполняет прямоугольная в плане цилиндрическая оболочка с нулевыми условиями на контуре (рис. 2).

Система (8) интегрируется на отрезке времени $[0, t^*]$. Этот отрезок разбивается на $P$ равных участков длиной $\Delta t$, так что $t^* = P\Delta t$. При такой дискретизации по времени, применяя метод разложения решения в ряд Тейлора [9], вид решения системы (8) на каждом шаге по времени можно представить в форме рекуррентных соотношений

$$\mathbf{T}^{p+1}=\left[\widetilde{A}\right]\mathbf{T}^p+\left[\widetilde{B}\right]\left(\mathbf{B}+[C]\mathbf{Q}^{p+1}\right), \tag{9}$$

где $p$ – текущий номер временного участка;

Условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях вспомогательной оболочки совпадают с условиями теплообмена на поверхностях исходной оболочки.

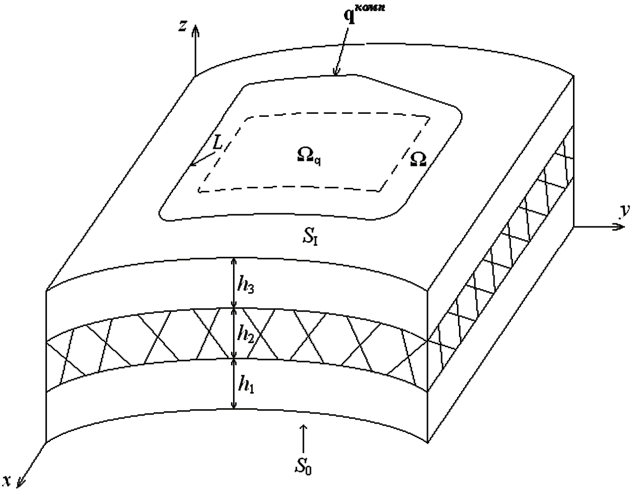


Рисунок 2 – Вспомогательная оболочка

Чтобы обеспечить выполнение реальных граничных условий на контуре, к вспомогательной оболочке в каждой узловой точке по толщине, вдоль следа границы $L$, прилагаются дополнительные компенсирующие источники $q_{ir}^{комп\, p+1}(x,y)$, $(x,y)\in L$, которые входят в систему уравнений теплопроводности (9) в виде

$$q_r^{i\,p+1}(x,y)=\oint_L q_{ir}^{\text{комп}\,\text{p}+1}(x_L,y_L)\delta(x-x_L,y-y_L)dL\,,\qquad r=0,1,2\,,$$

где $\delta(x-x_L,y-y_L)$ – двумерная $\delta$-функция Дирака.

Удовлетворение граничным условиям на следе контура $L$ приводит к системе интегральных уравнений для определения распределений компенсирующих источников

$$\mathbf{B}^L\,\mathbf{T}\left[\mathbf{q}^{комп\, p+1}(x,y)\right]=0,\;\; x,y\in L\,. \tag{10}$$

Далее $T_r^{i\,p+1}(x,y)$ и $q_r^{i\,p+1}(x,y)$ разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям на границе охватывающей, прямоугольной в плане, оболочки,

$$T_r^{i\,p+1}(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}T_{mnr}^{i\,p+1}\sin\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B}\,;$$

$$q_r^{i\,p+1}(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}q_{mnr}^{i\,p+1}\sin\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B}\,,$$

где $A$ и $B$ – длины сторон разворота охватывающей оболочки.

Кроме того, функции $T_r^{i\,p+1}$ и $q_r^{i\,p+1}$, входящие в граничные условия исходной оболочки, разлагаются в ряд вдоль следа контура $L$ [10-12]

$$T_r^{i\,p+1}(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} T_{\alpha\mu r}^{i\,p+1}\, d_{\alpha\mu}(s)\ ;\ q_r^{i\,p+1}(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} q_{\alpha\mu r}^{i\,p+1}\, d_{\alpha\mu}(s)\ ,$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)],\ d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)]\ ;\ \gamma(s) = \frac{2\pi\int_0^s \mathrm{d}\tilde{s}}{\int_0^{s^*} \mathrm{d}\tilde{s}},\ 0 \le \gamma(s) \le 2\pi\ .$$

В результате преобразований система интегральных уравнений (10) сводится на каждом шаге по времени к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих источников $q_{\mu\alpha r}^{i\,p+1}$ .

**Результаты исследований.** Проведено сравнение результатов расчета на основе предлагаемого подхода с результатами, полученными в ходе проведения термографического исследования многослойной цилиндрической оболочки.

Исследование проводилось при помощи тепловизора Fluke Ti-40. Показания тепловизора фиксировались с интервалом в 30 с на протяжении 300 с. Измерения начинались в момент включения источника тепла.

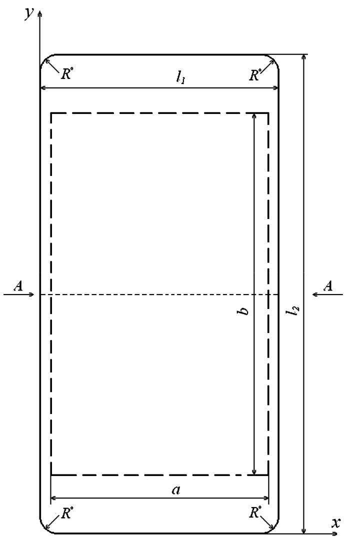


Рисунок 3 – Расчетная схема цилиндрической оболочки

На рис. 3 приведена расчетная схема. Исследуемый объект имел следующие геометрические и теплофизические характеристики: количество слоев $I = 5$; толщины слоев $h_1 = 0{,}020$ м; $h_2 = 0{,}002$ м; $h_3 = 0{,}015$ м; $h_4 = 0{,}003$ м;

$h_5 = 0,005$ м; размеры, показанные на рис. 3, $l_1 = 0,33$ м; $l_2 = 0,66$ м; $R^e = 0,025$ м; радиус кривизны оболочки $R = 1,334$ м (дуга в направлении оси $y$); коэффициенты теплопроводности материала слоев $k_i = 1,60$ Вт/(м·K) ($i = 1, 3, 5$); $k_i = 0,17$ Вт/(м·K) ($i = 2, 4$); коэффициенты конвективного теплообмена $H_1 = 8,7$ Вт/(м$^2$·K); $H_I = 30$ Вт/(м$^2$·K); температуры внешней среды $T^1_\infty = 302$ K; $T^I_\infty = 302$ K, начальная температура слоев оболочки $T^i_0 = 302$ K ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Мощность пленочного источника тепла, расположенного между четвертым и пятым слоями: $q_1 = 1340$ Вт/м$^2$, а его размеры (см. рис. 3) – $a = 0,3$ м, $b = 0,5$ м.

Контур объекта теплоизолирован.

На рис. 4, показаны распределения температур на внешней поверхности поседнего слоя оболочки в разные моменты времени в сечении $A – A$, обозначенном на расчетной схеме пунктирной линией.

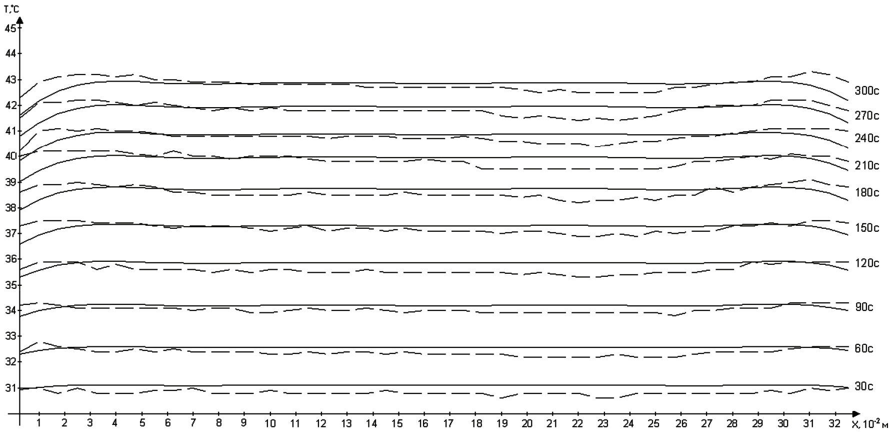


Рисунок 4 – Распределение температуры на внешней поверхности пятого слоя оболочки в разные моменты времени, сечение *A-A*

**Выводы.** Разработан метод решения задач нестационарной теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных цилиндрических оболочек, позволяющий описать тепловое состояние оболочек неканонической формы в плане.

Сравнение с результатами исследования подтверждает достоверность результатов, полученных на основе предлагаемого подхода.

Предложенный подход может быть применен при проектировании многослойного остекления летательных аппаратов и других транспортных средств.

**Список литературы:** **1.** *Kantor B.Ya.* Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates / *B.Ya. Kantor, N.V. Smetankina, A.N. Shupikov* // Int. J. Solids and Structures. – 2001.

– Vol. 38. – P. 8673-8684. **2.** *Болотин В.В.* Механика многослойных конструкций. / *Ю.Н. Новичков, В.В. Болотин* – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **3.** *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. *А.С. Сахарова и И. Альтенбаха.* – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 480 с. **4.** *Рвачев В.Л.* Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы / *В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко, М.М. Литвин* // Теплофизика и теплотехника. – 1977. – Вып. 32. – С. 18-22. **5.** *Smetankina N.V.* Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates / *N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, Ye.V. Svet* // Trans. ASME. J. of Heat Transfer. – March, 2007.– Vol. 129. – P. 335-341. **6.** *Свет Е.В.* Стационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы / *Е.В. Свет* // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 3 (75).– Х., 2013. – С. 77 – 85. **7.** *Свет Е.В.* Нестационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы / *Е.В. Свет* // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин.– Х.: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 63 (1036). – С. 122-131. **8.** *Бахвалов Н.С.* Численные методы / *Н.С. Бахвалов* – М.: Наука, 1975. – 632 с. **9.** *Шупиков А.Н.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. Научное издание / *А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов*. – Х.: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с. **10.** *Zielinski A.P.* On curvilinear distribution expressed by double Fourier series / *A.P. Zielinski* // J. Appl. Math. and Phys. – 1980. – Vol. 31. – P. 717–729. **11.** *Zielinski A.P.* Metoda trygonometrycznych szeregow okreslonych na konture w zastosowaniu do plyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym / *A.P. Zielinski* // Rozpr. inz. – 1982. – Vol. 30, № 2. – P. 151–165. **12.** *Zielinski A.P.* A contour series method applied to shells / *A.P. Zielinski* // Thin–Walled Struct. – 1985. – № 3. – P. 217-229.

**Bibliography (transliterated): 1.** Kantor B.Ya., N.V Smetankina and A.N. Shupikov "Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates." Int. J. Solids and Structures. Vol. 38. 2001. 8673-8684. Print. **2.** Bolotin V.V., Ju.N. Novichkov Mehanika mnogoslojnyh konstrukcij. Moscow. Mashinostroenie. 1980. Print. **3.** Saharov A.S., I. Al'tenbah Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyh tel. Kiev: Vishha shkola. Golovnoe izd-vo. 1982. Print. **4.** Rvachev V.L. A.P., Slesarenko and M.M. Litvin "Raschet temperaturnogo polja kusochno-odnorodnyh tel slozhnoj formy." Teplofizika i teplotehnika. № 32. 1977. 18–22. Print. **5.** Smetankina N.V., Shupikov A.N., Svet Ye.V. "Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates." Trans. ASME. J. of Heat Transfer. Vol. 129. 2007. 335–341. Print. **6.** Sviet Ye.V. "Stacionarnaja zadacha teploprovodnosti v trehmernoj postanovke dlja mnogoslojnyh plastin slozhnoj formy." Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov: sb. nauch. tr. Nac. ajerokosm. un-ta im. N.E. Zhukovskogo «HAI».№3.75. Kharkov. 2013. 77 – 85. Print. **7.** Sviet Ye.V. "Nestacionarnaja zadacha teploprovodnosti v trehmernoj postanovke dlja mnogoslojnyh plastin slozhnoj formy." Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats'. Ser.: Dynamika i mitsnist' mashyn. № 63 (1036). 2013. 122-131. Print. **8.** Bahvalov N.S. Chislennye metody. Moscow: Nauka. 1975. Print. **9.** Shupikov A.N., Ja.P. Buz'ko, N.V. Smetankina and S.V. Ugrimov Nestacionarnye kolebanija mnogoslojnyh plastin i obolochek i ih optimizacija. Nauchnoe izdanie. Kharkov: Izd. HNJeU. 2004. Print. **10.** Zielinski A.P. "On curvilinear distribution expressed by double Fourier series." J. Appl. Math. and Phys. Vol. 31. 1980. 717–729. Print. **11.** Zielinski A.P. "Metoda trygonometrycznych szeregow okreslonych na konture w zastosowaniu do plyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym." Rozpr. inz. Vol. 30 № 2. 1982. 151–165. Print. **12.** Zielinski A.P. "A contour series method applied to shells." Thin–Walled Struct. № 3. 1985. 217–229. Print.

*Поступила (received) 24.09.2014*