УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

А. В. ЖИЛЬЦОВ, Д. С. СОРОКІН

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ КОАКСІАЛЬНО-ЛІНІЙНОГО ДВИГУНА З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ

На основі вісесиметричної інтегро-диференційної математичної моделі коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами розроблено алгоритм сумісного чисельного розв'язку нестаціонарної електромеханічної задачі з розрахунку вихрових струмів в масивних провідниках, його динамічних та енергетичних характеристик.

Ключові слова: коаксіально-лінійний двигун, постійні магніти, нестаціонарний процес, метод інтегральних рівнянь, вихрові струми

Вступ. Головною особливістю режимів роботи лінійних двигунів є неможливість одночасного використання всіх контурів вторинної обмотки системи (обмотки статора). Це призводить до появи перехідних процесів у первинних та вторинних контурах на протязі всього робочого циклу двигуна і, як наслідок, збільшення втрат у крайових зонах магнітопроводів, зменшення ККД та коефіцієнта потужності.

Електромеханічні процеси, які протікають в коаксіально-лінійному двигуні після підключення його статорної обмотки до мережі, описуються складними системами інтегро-диференційних рівнянь (інтегральними за просторовими змінними, диференційними за часом) [1,5] розв'язок яких можливий лише чисельними методами [6].

Різноманітність конструктивних рішень лінійних електричних машин спричиняє необхідність аналізу електромеханічних процесів в них з метою подальшого визначення оптимальних геометричних та електрофізичних параметрів, режимів їх роботи.

При розробці конструкцій лінійних електричних машин і режимів їх роботи важливу роль відіграє математичне моделювання впливу технологічних і конструктивних параметрів електротехнічних пристроїв на зв'язані електромагнітні і механічні процеси, що протікають в них. У загальному випадку це потребує вирішення тривимірних крайових задач для рівнянь Максвелла в необмеженій неоднорідній області, що містить геометрично складні феромагнітні і провідні тіла, рівнянь руху:

$$rot\vec{H}=\vec{\delta}\,,\; rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,\; div\vec{B}=0\,,\; div\vec{\delta}=0\,,\; \vec{B}=\mu\vec{H}\,,$$

$$\vec{\delta}=\gamma\left(\vec{E}+\left[\vec{V},\vec{B}\right]\right), \tag{1}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_г+\vec{F}_{ем}+m\vec{g}+\vec{F}_з+\vec{F}_д\,. \tag{2}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V}\,. \tag{3}$$

Тут $\vec{E}$ – напруженість електричного поля, В/м; $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля, А/м; $\vec{B}$ – магнітна індукція, Тл; $\vec{\delta}$ – густина струму, А/м^3; γ – питома провідність, См/м; μ – абсолютна магнітна проникність середовища, Гн/м; $\vec{V}$ – швидкість руху якоря, м/с; m – маса якоря, кг; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, 9,81 м/с^2; $\vec{r}$ – радіус-вектор положення якоря, м; t – час, с; $\vec{F}_г$ – сила пружності пружин, до яких прикріплено якір лінійного двигуна, Н; k – коефіцієнт жорсткості пружин, Н/м; $\vec{F}_{ем}$ – сила, що діє на якір з боку електромагнітного поля, Н; $\vec{F}_з$ – зовнішня сила, що діє на якір (навантаження на двигун), Н; $\vec{F}_д=-\alpha\vec{V}$ – демпферна сила, Н; α – коефіцієнт демпфування, кг/с.

В роботі [8] описано розрахунок перехідних процесів в магнітофугальних двигунах. Розглянуті електромагнітні процеси в лінійних двигунах, конструкція яких має осьову симетрію.

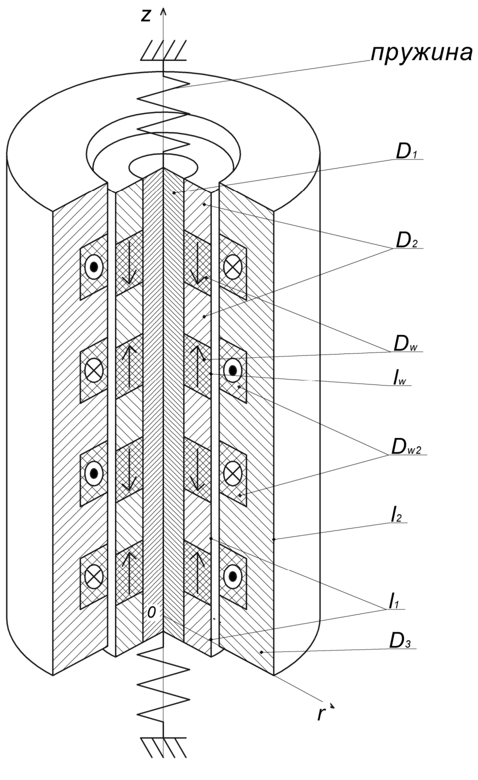
В роботі [7] наведено варіант чисельного алгоритму розв'язання рівнянь динаміки магнітофугального двигуна. Обґрунтовано доцільність використання методу накладань для розв'язання рівнянь. При цьому результуюче поле двигуна представляється як сума полів, створених окремими елементами конструкції.

В роботі [6] проведено аналіз електромагнітних процесів у коаксіально-лінійному двигуні особливостями конструкції якого є трифазна обмотка статора, з'єднання котушок відбувається за схемою з'єднань асинхронного двигуна.

В роботі [3] розглянуто конструкцію двигуна з обмотками змінного струму на статорі та обмотками постійного струму на якорі. Розроблено математичну модель електромеханічного процесу в коаксіально-лінійному двигуні з допущенням, що магнітопровід виконано шихтованим.

Метою дослідження є розробка алгоритму чисельного рішення нестаціонарної електромеханічної задачі та дослідження за його допомогою режимів роботи коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами.

Постановка задачі. На рис. 1 зображена спрощена схема коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами, який складається з співвісно розташованих кільцевих котушок D_{w2}, постійних магнітів D_w та тороїдальних сталевих тіл D_1, D_2, D_3 [0, 0] з заданою питомою провідністю γ_1, γ_2, γ_3. Якір двигуна складається з масивного неферомагнітного провідного осердя D_1, феромагнітних провідних кілець D_2 з абсолютною магнітною проникністю μ_2 та зустрічно намагнічених вздовж вісі Oz постійних магнітів D_w з намагніченістю $\vec{J}$ та закріплено



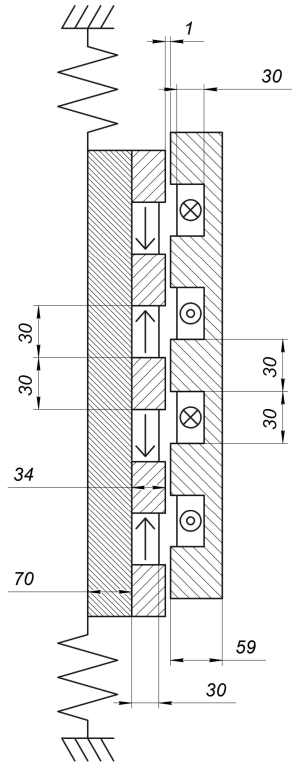


Рис. 1 – Коаксіально-лінійний двигун з постійними магнітами:
а – спрощена схема; *б* – меридіанний переріз.

пружинами з жорсткістю k. Статор виконано з масивного феромагнітного провідника D_3 з абсолютною магнітною проникністю μ_3 та розміщених в ньому котушок D_{w2}, які живляться від перетворювача частоти з напругою $u_2 = u_2(t)$ або від джерела струму зі струмом $i_{w2}(t)$.

Вісь магнітної системи суміщається з віссю z циліндричної системи координат (r, α, z).

Розрахунок осесимметричного поля достатньо виконати, як відомо, в меридіанній площині $\alpha = const$, оскільки в інших площинах воно буде ідентичним.

В загальному вигляді система інтегро-диференційних рівнянь для розрахунку густини вихрових струмів в масивних провідниках та струмів намагніченості на границях магнітопроводів має вид [1,5]:

$$\sigma(Q,t) + \frac{\chi}{\pi}\oint_l \sigma(M,t)P(Q,M)dl_M + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\chi}{\pi}\iint_D \delta(M,t)P(Q,M)ds_M = -\frac{\chi}{\pi}\oint_{l_w} J(M)P(Q,M)dl_M - \frac{\chi}{\pi}\iint_{D_{w2}} \delta_{w2}(M,t)P(Q,M)ds_M$$

$$Q \in l = l_1 + l_2 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_l \sigma(M,t)T(Q,M)dl_M + \frac{\delta(Q,t)}{\gamma\lambda} + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\iint_D \delta(M,t)T(Q,M)ds_M = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{w2}} \delta_{w2}(M,t)T(Q,M)ds_M + \Phi(Q,t)$$

$$Q \in D = D_1 + D_2 + D_3, \qquad (4)$$

$$\delta(Q,0) = \delta^{(0)}(Q),\ \delta_w(Q,0) = \delta_w^{(0)}(Q),$$

$$\sigma(M,0) = \sigma^{(0)}(M), \qquad (5)$$

де $\sigma(Q,t)$ – миттєве значення густини простого шару струмів намагнічування в точці Q границі феромагнітних тіл $l = l_1 + l_2$;

l_1 – границя феромагнітних масивних кілець якоря,

l_2 – границя феромагнітного масивного статора (рис. 1, *б*);

$\delta(Q,t)$ – миттєве значення густини вихрових струмів в точці Q перерізу масивних провідників $D = D_1 + D_2 + D_3$;

$\sigma(M,t)$, $\delta(M,t)$ – теж саме в точці M;

γ – питома електропровідність матеріалів осердя, кілець та статора;

$\chi = (\mu^+ - \mu^-)/(\mu^+ + \mu^-)$, μ^+, μ^- – абсолютна магнітна проникність матеріалів феромагнітних кілець якоря та статора при наближенні до точки M відповідно зсередини та ззовні;

$$P(Q,M)=\vec{e}_z\left[\vec{n}_Q\times\vec{b}(Q,M)\right]=$$
$$=n_z(Q)b_r(Q,M)-n_r(Q)b_z(Q,M),$$

$$b_r(Q,M)=\frac{z_Q-z_M}{r_Q\sqrt{(r_Q+r_M)^2+(z_Q-z_M)^2}}\times$$
$$\times\left[-K(k)+\frac{r_Q^2+r_M^2+(z_Q-z_M)^2}{(r_M-r_Q)^2+(z_Q-z_M)^2}E(k)\right],$$

$$b_z(Q,M)=\frac{1}{r_Q\sqrt{(r_Q+r_M)^2+(z_Q-z_M)^2}}\times$$
$$\times\left[K(k)+\frac{r_M^2-r_Q^2+(z_Q-z_M)^2}{(r_M-r_Q)^2+(z_Q-z_M)^2}E(k)\right],$$

$$T(Q,M)=\sqrt{r_M/r_Q}\,f(k),\ f(k)=\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)-\frac{2}{k}E(k),$$

$$k^2=\frac{4r_Qr_M}{(r_Q+r_M)^2+(z_Q-z_M)^2},$$

де r_Q, z_Q, r_M, z_M – координати точок Q та M відповідно;

$K(k)$, $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду;

$\Phi(Q,t)=\gamma\left[\vec{V}(Q,t)\times\vec{B}(Q,t)\right]\vec{e}_z$ – доданок, що відповідає за вплив швидкості руху якоря на розподіл густини вихрових струмів;

$V(Q,t)$ – швидкість руху якоря відносно статора;

$\vec{B}(Q,t)$ – магнітна індукція, що обумовлена струмами $\delta_{w2}(M,t)$ обмотки статора, вихровими струмами $\delta_2(M,t)$ в масивному статорі та струмами намагнічування $\sigma_2(M,t)$ на його границі

$$\vec{B}(Q,t)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{D_{w2}}\delta_{w2}(M,t)\vec{b}(Q,M)ds_M+$$
$$+\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{D_2}\delta_2(M,t)\vec{b}(Q,M)ds_M+$$
$$+\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{l_2}\sigma_2(M,t)\vec{b}(Q,M)dl_M,$$

де $\delta_w^{(0)}(Q)$, $\sigma^{(0)}(M)$, $\delta^{(0)}(Q)$ – початкові значення густини струмів в обмотці статора, вихрових струмів та струмів намагнічування, які визначаються з докомутаційного режиму.

Розрахунок поля постійних, однорідно-намагнічені паралельно вісі Oz, магнітів можна звести до розрахунку поля від простого шару струмів з густиною $\sigma_J=\left[\vec{J}\times\vec{n}\right]\vec{e}_z$ на границі l_w постійних магнітів [11], де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до границі магніту, що враховано при виводі рівняння (3).

Доповнюємо інтегро-диференційні рівняння для густини струмів (3), (4) рівняннями руху якоря з початковими умовами:

$$m\frac{dV(t)}{dt}=-2kz(t)-mg+F_{ем}(t)+F_з(t)+F_д(t),\quad(6)$$

$$\frac{dz}{dt}=V(t),\quad(7)$$

$$z(0)=z^{(0)},\qquad V(0)=V^{(0)},\quad(8)$$

де $F_{ем}(t)$, $F_з(t)$, $F_д(t)$ – миттєве значення z-проекції електромагнітної сили, зовнішньої сили та демпферної сили;

$z(0)=z^{(0)}$, $V(0)=V^{(0)}$ – початкові значення координати та швидкості руху якоря.

Апроксимація системи інтегро-диференційних рівнянь. Для апроксимації за просторовими змінними використовується метод повного осереднення [9, 10, 11,2], який має переваги перед іншими завдяки розбиттю областей на доволі великі, порівняно з вимогами інших методів, ділянки при зберіганні точності апроксимації.

Розбиваємо меридіанний переріз кожного з масивних провідників D_m, $m\in\{1,2,3\}$, відповідно на N_{D_m} елементарних областей ΔD_{mi}, $i=1,2,...,N_{D_m}$, а слід l_1, l_2 від перерізу меридіанною площиною границі феромагнітних кілець якоря D_1 та статора D_2 на N_{l_1}, N_{l_2} елементарних ділянок Δl_{im}, $i=1,2,...,N_{l_m}$, $m\in\{1,2\}$. Переріз обмотки статора D_{w2} розбиваємо на $N_{D_{w2}}$ областей, кожна з яких є переріз котушки із заданою густиною струму. Розбиваємо границю l_w постійних магнітів на N_w елементарних відрізків Δl_{wi}, $i=1,2,...,N_w$. Для шуканих величин використовуємо кусочно-постійну апроксимацію.

Застосовуючи метод повного осереднення, система інтегро-диференційних рівнянь (3), (4) апроксимується за просторовими змінними наступною системою рівнянь:

$$\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_1}\vec{\delta}_1(t)+\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_2}\vec{\delta}_2(t)+$$
$$+\frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_3}\vec{\delta}_3(t)+\left(\Delta L_1+\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1L_1}\right)\vec{\sigma}_1(t)+$$
$$+\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1L_2}\vec{\sigma}_2(t)=-\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1L_w}\vec{\sigma}_J-\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t),\quad(9)$$

$$\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_1}\vec{\delta}_1(t)+\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_2}\vec{\delta}_2(t)+\frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_3}\vec{\delta}_3(t)+$$
$$+\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2L_1}\vec{\sigma}_1(t)+\left(\Delta L_2+\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2L_2}\right)\vec{\sigma}_2(t)=$$
$$=-\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2L_w}\vec{\sigma}_J-\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t),\quad(10)$$

$$\frac{\Delta D_1}{\gamma_1\lambda}\vec{\delta}_1(t)+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_1D_1}\vec{\delta}_1(t)+\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}T_{D_1D_2}\vec{\delta}_2(t)+$$

$$+\frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}T_{D_1D_3}\vec{\delta}_3(t)-\frac{\mu_3}{\mu_0}V(t)B_{rD_1D_3}\vec{\delta}_3(t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_1L_1}\vec{\sigma}_1(t)+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_1L_2}\vec{\sigma}_2(t)-V(t)B_{rD_1L_2}\vec{\sigma}_2(t)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}T_{D_1D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t)+V(t)B_{rD_1D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t), \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{D_2D_1}\vec{\delta}_1(t)+\frac{\Delta D_2}{\gamma_2\lambda}\vec{\delta}_2(t)+\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}T_{D_2D_2}\vec{\delta}_2(t)+$$

$$+\frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}T_{D_2D_3}\vec{\delta}_3(t)-\frac{\mu_3}{\mu_0}V(t)B_{rD_2D_3}\vec{\delta}_3(t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_2L_1}\vec{\sigma}_1(t)+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_2L_2}\vec{\sigma}_2(t)-V(t)B_{rD_2L_2}\vec{\sigma}_2(t)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}T_{D_2D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t)+V(t)B_{rD_2D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3D_1}\vec{\delta}_1(t)+\frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3D_2}\vec{\delta}_2(t)+\frac{\Delta D_3}{\gamma_3\lambda}\vec{\delta}_3(t)+$$

$$+\frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3D_3}\vec{\delta}_3(t)+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3L_1}\vec{\sigma}_1(t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3L_2}\vec{\sigma}_2(t)=-\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3D_{w2}}\vec{\delta}_{w2}(t)-\frac{\partial}{\partial t}T_{D_3Lw}\vec{\sigma}_J, \quad (13)$$

де $\lambda=\mu_0/(2\pi)$; $\chi_k=(\mu_k-\mu_0)/(\mu_k+\mu_0)$, $k\in\{1,2\}$;

$\vec{\delta}_m(t)=\left\|\delta_{m1}(t),\delta_{m2}(t),...,\delta_{mN_{D_m}}(t)\right\|^T$ – вектор-стовпець, елементами якого є миттєві значення густини вихрових струмів у центрі елементарної області ΔD_{mi}, $i=1,2,...,N_{D_m}$, $m\in\{1,2,3\}$;

$$P_{L_kD_m}=\left\|\int\limits_{\Delta l_{ki}}\int\limits_{\Delta D_{mj}}P(Q,M)ds_M\,dl_Q\right\|, i=\overline{1,N_{l_k}}, \quad j=\overline{1,N_{D_m}},$$
$$k\in\{1,2\},\ m\in\{1,2,3\};$$

$$P_{L_kL_m}=\left\|\int\limits_{\Delta l_{ki}}\int\limits_{\Delta l_{mj}}P(Q,M)dl_M\,dl_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{l_k}}, \quad j=\overline{1,N_{l_m}},$$
$$k\in\{1,2\},\ m\in\{1,2\};$$

$\Delta L_k=diag\left\|\Delta l_{k1},\Delta l_{k2},...,\Delta l_{kN_{l_k}}\right\|$ – діагональна матриця розмірності $N_{l_k}\times N_{l_k}$, елементами якої є довжини відрізків ΔL_{ik}, $i=1,2,...,N_{l_k}$, на які розбивається границя l_k k-го феромагнітного тіла, $k\in\{1,2\}$;

$\vec{\sigma}_m(t)=\left\|\sigma_{m1}(t),\sigma_{m2}(t),...,\sigma_{mN_{L_m}}(t)\right\|^T$ – вектор-стовпець, елементами якого є значення миттєвої густини струмів намагніченості в центрі елементарної ділянки ΔL_{mi}, $i=1,2,...,N_{l_m}$, $m\in\{1,2\}$;

$$P_{L_kL_w}=\left\|\int\limits_{\Delta l_{ki}}\int\limits_{\Delta l_{wj}}P(Q,M)dl_M\,dl_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{l_k}},\ j=\overline{1,N_{l_w}},$$
$$k\in\{1,2\};$$

$$P_{L_kL_w}\vec{\sigma}_J=\left\|\int\limits_{\Delta l_{ki}}\int\limits_{l_w}\sigma_J(M)P(Q,M)dl_M\,dl_Q\right\|^T,\ i=1,2,...,N_{ki},$$

$k\in\{1,2\}$ – вектор-стовбець розмірності N_{l_k}, що враховує поле постійних магнітів;

$\vec{\delta}_{w2}(t)=\left\|\delta_{w21}(t),\delta_{w22}(t),...,\delta_{w2N_{D_{w2}}}(t)\right\|^T$ – вектор-стовпець розмірності $N_{D_{w2}}$; його компонентами є миттєві значення густини вихрових струмів на ділянках ΔD_{w2j}, $j=1,2,...,N_{D_{w2}}$, на які розбивається область D_{w2};

$$P_{L_kD_{w2}}=\left\|\int\limits_{\Delta l_{ki}}\int\limits_{\Delta D_{w2j}}P(Q,M)ds_M\,dl_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{l_k}},$$
$$k\in\{1,2\},\ j=\overline{1,N_{D_{w2}}};$$

$\Delta D_k=diag\left\|\Delta D_{k1},\Delta D_{k2},...,\Delta D_{kN_{D_k}}\right\|$ – діагональна матриця розмірності $N_{D_k}\times N_{D_k}$, елементами якої є площі елементів ΔD_{ki}, $i=1,2,...,N_{D_k}$, на які розбивається переріз D_k, $k\in\{1,2,3\}$;

$$T_{D_kD_m}=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta D_{mj}}T(Q,M)ds_M\,ds_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{D_k}},\ j=\overline{1,N_{D_m}},$$
$$k,m\in\{1,2,3\};$$

$$T_{D_kL_m}=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta l_{mj}}T(Q,M)dl_M\,ds_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{D_k}},\ j=\overline{1,N_{l_m}},$$
$$k\in\{1,2,3\}\ m\in\{1,2\};$$

$$T_{D_kL_w}\vec{\sigma}_J=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta l_{wj}}\vec{\sigma}_J(M)T(Q,M)dl_M\,ds_Q\right\|^T,\ i=\overline{1,N_{D_k}},$$

$j=\overline{1,N_{l_w}}$, $k\in\{1,2,3\}$ – вектор-стовбець розмірності N_{l_k}, що враховує поле постійних магнітів;

$$T_{D_kD_{w2}}=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta D_{w2j}}T(Q,M)ds_M\,ds_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{D_k}},\ j=\overline{1,N_{D_{w2}}},$$
$$k\in\{1,2,3\};$$

$$B_{rD_kD_3}=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta D_{3j}}T(Q,M)ds_M\,ds_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{D_k}},\ j=\overline{1,N_{D_3}},$$
$$k\in\{1,2\};$$

$$B_{rD_kL_2}=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta l_{2j}}T(Q,M)dl_M\,ds_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{D_k}},\ j=\overline{1,N_{l_2}},$$
$$k\in\{1,2\};$$

$$B_{rD_kD_{w2}}=\left\|\int\limits_{\Delta D_{ki}}\int\limits_{\Delta D_{w2j}}T(Q,M)ds_M\,ds_Q\right\|,\ i=\overline{1,N_{D_k}},\ j=\overline{1,N_{D_{w2}}},$$
$$k\in\{1,2\}.$$

Далі на часовій осі обираємо, в загальному випадку, нерівномірну сітку $t_n = n\tau$, $n = 1,2,3...$, τ – шаг часової сітки. Проінтегруємо рівняння (11)-(13) на відрізку часу $[t_{n-1}, t_n]$, при цьому інтеграли замінимо наступними наближеними виразами:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \vec{\delta}(t)dt = \left[c\vec{\delta}(t_n) + (1-c)\vec{\delta}(t_{n-1})\right]\tau_n, \tag{14}$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial}{\partial t} T_{DD}\vec{\delta}(t)dt = T_{DD}^n\vec{\delta}(t_n) - T_{DD}^{n-1}\vec{\delta}(t_{n-1}), \tag{15}$$

де c – ваговий коефіцієнт, який приймає значення $\{0;0,5;1\}$. При $c=0$ та $c=1$ вираз (14) являє собою формули прямокутників (перший порядок точності), при $c=0,5$ – формули трапецій (другий порядок точності).

Система диференційних рівнянь (9)-(13) апроксимується наступною системою алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_1}^n\vec{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_2}^{(n)}\vec{\delta}_2(t_n) + \frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_3}^{(n)}\vec{\delta}_3(t_n) +$$
$$+\left(\Delta L_1 + \frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1L_1}^{(n)}\right)\vec{\sigma}_1(t_n) +$$
$$+\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1L_2}^{(n)}\vec{\sigma}_2(t_n) = -\frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1Lw}^{(n)}\vec{\sigma}_J - \frac{\chi_1}{\pi}P_{L_1D_{w2}}^{(n)}\vec{\delta}_{w2}(t_n); \tag{16}$$

$$\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_1}^{(n)}\vec{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2}{\mu_0}\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_2}^{(n)}\vec{\delta}_2(t_n) + \frac{\mu_3}{\mu_0}\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_3}^{(n)}\vec{\delta}_3(t_n) +$$
$$+\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2L_1}^{(n)}\vec{\sigma}_1(t_n) + \left(\Delta L_2 + \frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2L_2}^{(n)}\right)\vec{\sigma}_2(t_n) =$$
$$= -\frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2Lw}^{(n)}\vec{\sigma}_J - \frac{\chi_2}{\pi}P_{L_2D_{w2}}^{(n)}\vec{\delta}_{w2}(t_n); \tag{17}$$

$$\left(\frac{\Delta D_1(1-c)\Delta t}{\gamma_1\lambda} + T_{D_1D_1}^{(n)}\right)\vec{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2}{\mu_0}T_{D_1D_2}^{(n)}\vec{\delta}_2(t_n) +$$
$$+\left(\frac{\mu_3}{\mu_0}T_{D_1D_3}^{(n)} - V(t_n)(1-c)\Delta t B_{rD_1D_3}^{(n)}\right)\vec{\delta}_3(t_n) +$$
$$+T_{D_1L_1}^{(n)}\vec{\sigma}_1(t_n) + \left(T_{D_1L_2}^{(n)} - V(t_n)(1-c)\Delta t B_{rD_1L_2}^{(n)}\right)\vec{\sigma}_2(t_n) =$$
$$= -\left(T_{D_1D_{w2}}^{(n)} - V(t_n)(1-c)\Delta t B_{rD_1D_{w2}}^{(n)}\right)\vec{\delta}_{w2}(t_n) +$$
$$+\left(\frac{\Delta D_1 c\Delta t}{\gamma_1\lambda} + T_{D_1D_1}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_1(t_{n-1}) + \frac{\mu_2}{\mu_0}T_{D_1D_2}^{(n-1)}\vec{\delta}_2(t_{n-1}) +$$
$$+\left(\frac{\mu_3}{\mu_0}T_{D_1D_3}^{(n-1)} - V(t_{n-1})c\Delta t B_{rD_1D_3}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_3(t_{n-1}) + T_{D_1L_1}^{(n-1)}\vec{\sigma}_1(t_{n-1}) +$$
$$+\left(T_{D_1L_2}^{(n-1)} - V(t_{n-1})c\Delta t B_{rD_1L_2}^{(n-1)}\right)\vec{\sigma}_2(t_{n-1}) +$$
$$+\left(T_{D_1D_{w2}}^{(n-1)} - V(t_{n-1})c\Delta t B_{rD_1D_{w2}}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_{w2}(t_{n-1}); \tag{18}$$

$$T_{D_2D_1}^{(n)}\vec{\delta}_1(t_n) + \left(\frac{\Delta D_2(1-c)\Delta t}{\gamma_2\lambda} + \frac{\mu_2}{\mu_0}T_{D_2D_2}^{(n)}\right)\vec{\delta}_2(t_n) +$$
$$+\left(\frac{\mu_3}{\mu_0}T_{D_2D_3}^{(n)} - V(t_n)(1-c)\Delta t B_{rD_2D_3}^{(n)}\right)\vec{\delta}_3(t_n) +$$
$$+T_{D_2L_1}^{n}\vec{\sigma}_1(t_n) + \left(T_{D_2L_2}^{(n)} - V(t_n)(1-c)\Delta t B_{rD_2L_2}^{(n)}\right)\vec{\sigma}_2(t_n) =$$
$$= -\left(T_{D_2D_{w2}}^{(n)} - V(t_n)(1-c)\Delta t B_{rD_2D_{w2}}^{(n)}\right)\vec{\delta}_{w2}(t_n) + T_{D_2D_1}^{(n-1)}\vec{\delta}_1(t_{n-1}) +$$
$$+\left(\frac{\Delta D_2 c\Delta t}{\gamma_2\lambda} + \frac{\mu_2}{\mu_0}T_{D_2D_2}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_2(t_{n-1}) +$$
$$+\left(T_{D_2D_3}^{(n-1)} - V(t_{n-1})(1-c)\Delta t B_{rD_2D_3}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_3(t_{n-1}) + T_{D_2L_1}^{(n-1)}\vec{\sigma}_1(t_{n-1}) +$$
$$+\left(T_{D_2L_2}^{(n-1)} - V(t_{n-1})(1-c)\Delta t B_{rD_2L_2}^{(n-1)}\right)\vec{\sigma}_2(t_{n-1}) +$$
$$+\left(T_{D_2D_{w2}}^{(n-1)} - V(t_{n-1})(1-c)\Delta t B_{rD_2D_{w2}}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_{w2}(t_{n-1}); \tag{19}$$

$$T_{D_3D_1}^{(n)}\vec{\delta}_1(t_n) + \frac{\mu_2}{\mu_0}T_{D_3D_2}^{(n)}\vec{\delta}_2(t_n) +$$
$$+\left(\frac{\Delta D_3\Delta t}{\gamma_3\lambda} + \frac{\mu_3}{\mu_0}T_{D_3D_3}^{(n)}\right)\vec{\delta}_3(t_n) +$$
$$+T_{D_3L_1}^{(n)}\vec{\sigma}_1(t_n) + T_{D_3L_2}^{(n)}\vec{\sigma}_2(t_n) =$$
$$= -T_{D_3D_{w2}}^{(n)}\vec{\delta}_{w2}(t_n) + T_{D_3D_1}^{(n-1)}\vec{\delta}_1(t_{n-1}) + \frac{\mu_2}{\mu_0}T_{D_3D_2}^{(n-1)}\vec{\delta}_2(t_{n-1}) +$$
$$+\left(\frac{\Delta D_3\Delta t}{\gamma_3\lambda} + \frac{\mu_3}{\mu_0}T_{D_3D_3}^{(n-1)}\right)\vec{\delta}_3(t_{n-1}) +$$
$$+T_{D_3L_1}^{(n-1)}\vec{\sigma}_1(t_{n-1}) + T_{D_3L_2}^{(n-1)}\vec{\sigma}_2(t_{n-1}) -$$
$$-T_{D_3Lw_1}^{(n)}\vec{\sigma}_J + T_{D_3Lw_1}^{(n-1)}\vec{\sigma}_J + T_{D_3D_{w2}}^{(n-1)}\vec{\delta}_{w2}(t_{n-1}). \tag{20}$$

За допомогою методу повного осереднення [9, 10, 11,2] та перетворень (14)-(15) система інтегро-диференційних рівнянь (3)-(4) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16)-(20) для густини струмів намагніченості $\vec{\sigma}(t_n)$ на границях феромагнітних тіл, та густини вихрових струмів $\vec{\delta}(t_n)$ в перерізі масивних провідників при відомих значеннях $\vec{\sigma}(t_{n-1})$ та $\vec{\delta}(t_{n-1})$, $\vec{\delta}_{w2}(t_{n-1})$.

Знаючи розподіл густини струмів можна визначити величину електромагнітної сили, що діє з боку нерухомого статора на рухомий якір [1, 4, 9].

Пошук рзв'язку ускладнюється тим, що необхідно сумісно розв'язувати електромагнітну задачу з пошуку розподілу густини струмів (16)–(20) з початковими умовами (5) та електромагнітної сили, що діє на якір з боку статора, та задачу механіки з пошуку положення якоря та швидкості його руху (6)–(8).

На основі [8] розроблено алгоритм пошуку рішення нестаціонарної електромеханічної задачі руху якоря коаксіально-лінійного двигуна за різних режимів живлення і навантаження, блок-схему якого представлено на Рис. 2.

З блок-схеми (Рис. 2) видно, що після задавання початкових значень координати $z_{(n-1)}$, швидкості руху якоря $v_{(n-3/2)}$, сили, що діє на якір F^- та розподілу густини струмів $\delta_{(n-1)}$, на дрібній часовій сітці в момент часу t_i на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$ послідовно розв'язується електромагнітна задача і шукається значення сили F_i^+ що діє на якір, $i = \overline{1,m}$, m – кількість елементів розбиття інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$.

Далі знаходиться середнє значення сили F^+ на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$. Знаючи F^+ та F^- - середнє значення сили на інтервалі від $t_{(n-3/2)}$ до $t_{(n-1)}$ знаходимо середнє значення сили, що діє на якір на інтервалі часу від $t_{n-1.5}$ до $t_{(n-1/2)}$, і перше наближення швидкості $v_{(n-1/2)}$.

За відомих $z_{(n-1)}$, $v_{(n-1/2)}$, $\delta_{(n-1)}$ на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$ послідовно розв'язується електромагнітна задача і шукається уточнене значення сили F_i^+. Знаючи середнє значення сили F^+ на інтервалі від $t_{(n-1)}$ до $t_{(n-1/2)}$ знаходимо нове положення якоря $z_{(n)}$, та уточнене значення швидкості руху якоря $v_{(n-1/2)}$.

На інтервалі від $t_{(n-1/2)}$ до $t_{(n)}$ послідовно розв'язується електромагнітна задача і шукається значення сили F_i^-, за яким знаходиться середнє значення F^-.

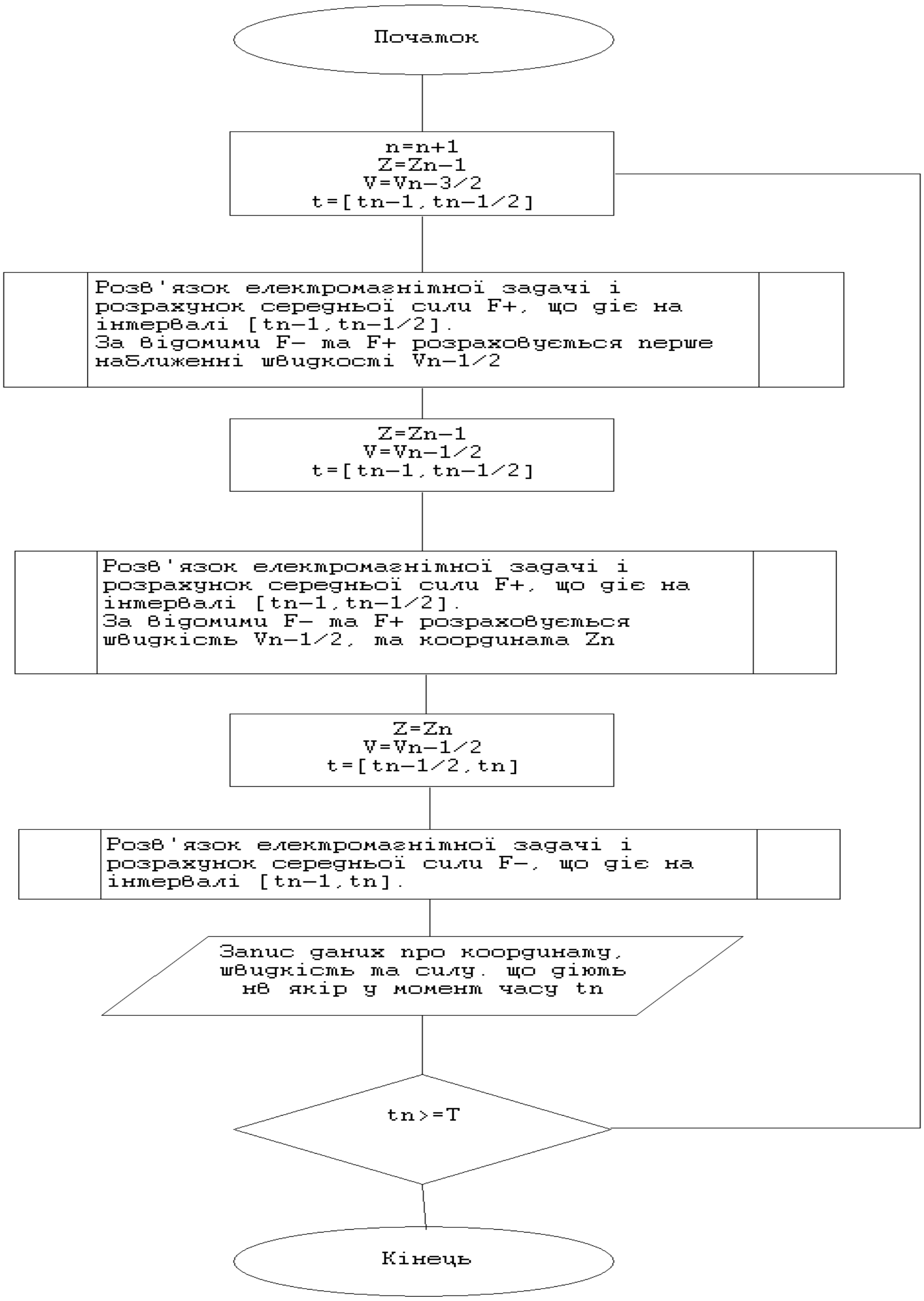


Рис. 2 – Блок-схема алгоритму розв'язку нестаціонарної електромеханічної задачі

Результати досліджень. Розроблений алгоритм розв'язку нестаціонарної електромеханічної задачі було реалізовано на мові програмування FORTRAN і проведено ряд чисельних експериментів. Для перевірки достовірності отриманих результатів проводилось порівняння з розв'язком, що отримано за допомогою програмного пакету COMSOL Multiphysics 3.5a для статичних випадків.

1. Для одного полюсного ділення проводився розрахунок r- компоненти індукції магнітного поля в зазорі при наявності масивних феромагнітних провідників і при зміні густини сили струму в котушці за законом: $\delta(t)=\delta_{max}\sin(\pi t)$.

Максимальне амплітудне значення густини струму приймають $\delta_{max}=3\cdot10^6$ А/м^2. Геометричні параметри лінійного двигуна наведені а рис. 1. *б*, питома провідність масивних тіл: $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=7{,}6\cdot10^6$ См/м, абсолютна магнітна проникність $\mu_2=\mu_3=100\mu_0$, $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

На рис. 3 наведено Залежність значення r-компоненти індукції магнітного поля від часу в точці з координатами (0,1045;-0,02), що дозволяє зробити висновок, що середньоквадратичне відхиленні рішення, отриманого з використанням розробленого алгоритму від рішення отриманого за допомогою програмного пакету COMSOL Multiphysics 3.5a становить не більше 3%.

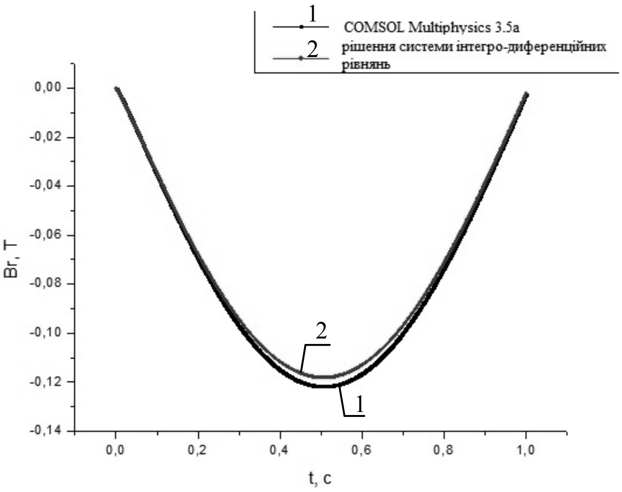


Рис. 3 – Залежність значення r-компоненти індукції магнітного поля від часу в точці з координатами (0,1045;-0,02).

2. Проводився розрахунок динамічного режиму роботи коаксіально-лінійного двигуна з кількістю пар полюсів $2p=5$, масою якоря $m=3000$ кг, жорсткістю пружин $k=735750$ Н/м, коефіцієнт в'язкого тертя $\alpha=15$ кг/с, початкове положення якоря $z(0)=-0{,}02$ м, початкова швидкість $V(0)=0$ м/с.

На рис. 4, 5 наведено результати розрахунку координати положення якоря та z –компоненти сили, що діє на нього з боку статора.

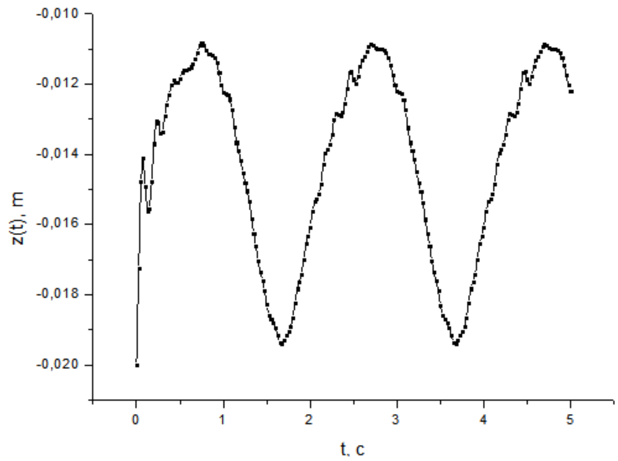


Рис. 4 – Залежність зміщення якоря коаксіально-лінійного двигуна від часу

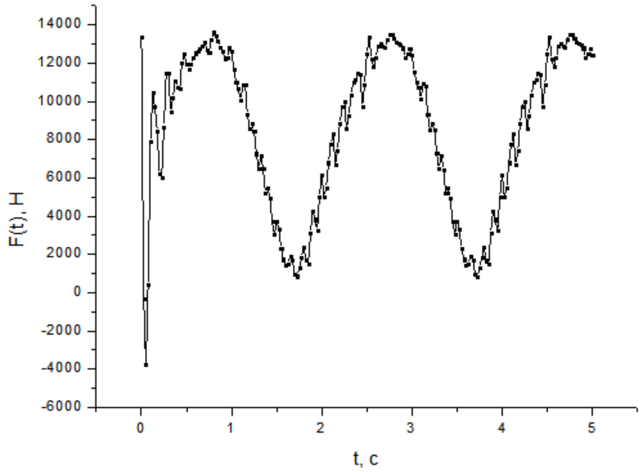


Рис. 5 – Залежність електромагнітної компоненти сили, що діє на якір коаксіально-лінійного двигуна з боку статора від часу та положення якоря

Висновки. В даній роботі проведено дискретизацію системи інтегро-диференційних рівнянь для пошуку густини струмів намагніченості на границі магнітопроводів та густини вихрових струмів у масивних провідниках коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами та розроблено алгоритм чисельного розв'язку нестаціонарної електродинамічної задачі руху якоря коаксіально-лінійного двигуна, що дозволяє з достатньою точністю проводити розрахунок та дослідження режимів його роботи.

Список літератури: 1. *A. Zhiltsov I. Kondratenko, D.* Sorokin Mathematical modeling of nonstationary electromechanical processes in coaxial-linear engine – ECONTECHMOD, Lublin-Lviv-Cracow, 2012. – VOL.12, №2. –P. 69 – 73. **2.** *Боженко А. И., Петрушенко Е. И.* Моделирование на ЭВМ переходных процессов в осесимметричных устройствах с немагнитными проводниками с учетом симметричности исходного интегро-дифференциального уравнения: Препр. / АН УССР. Ин-т электродинамики; 324.– К.: 1984.–55 с. **3.** *Евдокимов В.Ф.* Расчет электромагнитных и тяговых характеристик коаксиально-линейного индукционного двигателя электрического вибратора методом интегральных уравнений / В.Ф. Евдокимов, А.В. Жильцов, И.П. Кондратенко [и др.] // Электронное моделирование. – 2008. – Т. 30, №4. – С. 85 – 96. **4.** *Жильцов А. В., Стадник И. П.* Измерение намагниченности однородно намагниченных постоянных магнитов // Электромеханика. – 2000. – №2. – С. 83-86.

5. *Жильцов А.В. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П., Сорокин Д.С.* Математическое моделирование нестационарных электромеханических процессов в коаксиально-линейном двигателе – Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України: Спеціальний випуск. – 2010. – Т.2. – С. 47 – 53. **6.** *Квачев Г.С.* Коаксиаьно-линейные двигатели и их использование в сельском и коммунальном хозяйстве: дис... д-ра техн. наук : 05.09.03 / Г. С. Квачев – Москва, 1969 – 100 с **7.** *Квачев Г. С.* О численном решении уравнений динамики магнитофугального двигателя / Г. С. Квачев, Е. И. Петрушенко, Н. И. Бессараб // Наука и техника в городском хозяйстве. Киев: Будівельник. — 1967.— вып. VIII. — С. 3 — 19. **8.** *Квачев Г. С.* Расчет переходных процессов в магнитофугальных двигателях / Г. С. Квачев, Е. И. Петрушенко // Наука и техника в городском хозяйстве. Киев: Будівельник. — 1966. — Вып. VII. — С. 3 — 10. **9.** *Петрушенко Е. И., Гаврюшенко О. Е.* Алгоритмы расчета на ЭЦВМ критических кривых продольных криотронов // Математическое моделирование и теория электрических цепей. – К.: Наукова думка, 1971. – Вып. 9. – С. 144-150. **10.** *Петрушенко Е. И., Пашко А. И., Трофимчук Н. Л., Филиппова Г. А.* Моделирование на ЭВМ трехмерного магнитного поля линейного одноэлементного трансформатора тока на основе векторного интегрального уравнения: Препр. / АН УССР. Ин–т проблем моделирования в энергетике; 34. – К.: 1986. – 46 с. **11.** *Петрушенко Е. І.* До апроксимації інтегральних рівнянь теорії електромагнітного поля алгебраїчними системами // Доповіді АН УРСР. Сер. А.– 1969. – №7.– С. 618-621.

Bibliography (transliterated):): 1. Zhiltsov, A., I. Kondratenko and D. Sorokin "Mathematical modeling of nonstationary electromechanical processes in coaxial-linear engine." *ECONTECHMOD,* Lublin-Lviv-Cracow. Vol. 12. No. 2. 2012. 69–73. Print. **2.** Bozhenko, A. I., and E. I. Petrushenko "Modelirovanie na EVM perehodnykh protcessov v osesimmetrichnykh ustroistvakh s nemagnitnymi provodnikami s uchetom simmetrichnosti ishodnogo integro-differentcial`nogo uravneniia." *Institut elektrodinamiki AN USSR,* Kyiv. Prepr. 1989. Print. **3.** Evdokimov, V.F., A.V. Zhiltsov and I. P. Kondratenko "Raschet elektromagnitnykh i tiagovykh harakteristik koaksialno-lineinogo induktcionnogo dvigatelia elektricheskogo vibratora metodom integralnykh uravnenii." *Elektronnoe modelirovanie,* Kyiv. 4. 2008. 83–86. Print. **4.** Zhiltsov, A. V., and I. P. Stadnik "Izmerenie namagnichennosti odnorodno namagnichennykh postoiannykh magnitov." *Elektromehanika* 2. (2000): 83–86. Print. **5.** Zhiltsov, A. V., et al. "Matematicheskoe modelirovanie nestatcionarnykh elektromehanicheskikh protcessov v koaksialno-lineinom dvigatele." *Modeliuvannia ta informatciini tekhnologiї. Zbirnik naukovikh pratc IPME im. G.Є. Puhova NAN Ukraїni: Spetcialnii vipusk*, Kyiv. Vol. 2. 2010. 47–53. Print. **6.** Kvachev, G. S. *Koaksiano-lineinye dvigateli i ikh ispolzovanie v selskom i kommunalnom hoziaistve. Dis... d-ra tekhn. nauk.* Moskva. 1969. Print. **7.** Kvachev, G. S., E. I. Petrushenko and N. I. Bessarab "O chislennom reshenii uravnenii dinamiki magnitofugalnogo dvigatelia." *Nauka i tekhnika v gorodskom hoziaistve,* Kyiv. Vol. VIII. 1967. 3–19. Print. **8.** Kvachev, G. S., and E. I. Petrushenko "Raschet perehodnykh protcessov v magnitofugalnykh dvigateliakh." *Nauka i tekhnika v gorodskom hoziaistve,* Kyiv. Vol. VII. 1966. 3–10. Print. **9.** Petrushenko, E. I., and O. E. Gavriushenko "Algoritmy rascheta na ETCVM kriticheskikh krivykh prodolnykh kriotronov." *Matematicheskoe modelirovanie i teoriia elektricheskikh tcepei,* Kyiv. Vol. 9. 1971. 144–150. Print. **10.** Petrushenko. E. I., A. I. Pashko, N. L. Trofimchuk and G. A. Philippova "Modelirovanie na EVM trekhmernogo magnitnogo polia lineinogo odnoelementnogo transformatora toka na osnove vektornogo integralnogo uravneniia." *AN USSR. Institut problem modelirovaniia v energetike,* Kyiv. Vol. 34. 1986. 86. Print. **11.** Petrushenko, E. I. "Do aproksimatcії integralnikh rivnian teorії elektromagnitnogo polia algebraїchnimi sistemami." *Dopovidi AN URSR.* Kyiv. No. 7. 1969. 618–621. Print.

Надійшла (received) 18.06.2015

«*Відомості про авторів / About the Authors*»

Жильцов Андрій Володимирович **–** доктор технічних наук, доцент, Національний університет біоресурсів і природокористування України, завідувач кафедри електричних машин і експлуатації електрообладнання; тел.: +38(066) 727-06-00, e-mail: azhilt@mail.ru

Zhiltsov Andrey Vladimirovich **–** Doctor of Technical Sciences, associate professor, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, head of electrical machinery and electrical operation, phone: +38 (066) 727-06-00, e-mail: azhilt@mail.ru

Сорокін Дмитро Сергійович **–** Національний університет біоресурсів і природокористування України, старший викладач кафедри електричних машин і експлуатації електрообладнання; тел.: +38 (050) 280-82-84, e-mail: sdima.asp@gmail.com

Sorokin Dmitry Sergeevich – National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, senior lecturer of electrical machines and maintenance of electric equipment; phone: +38 (050) 280-82-84, e-mail: sdima.asp@gmail.com