УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук, А.Ю. ЮДИН

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ГИБРИДНЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ В РЕШЕТКАХ ТУРБОМАШИН

Розглянуті гібридні (змішані) задачі про течію в міжлопатковому каналі на поверхні току у шарі кінцевої товщини, які є уніфікацією і узагальненням прямої та оберненої задач: одні граничні умови на поверхні лопатки є геометричними, а другі є аеродинамічними. Використовується циліндрична система координат. Початкові дані задачі: товщина шару, масова витрата через цей шар, повний тиск та повний питомий об'єм робочого тіла перед каналом або за каналом. Граничні умови: задана форма деяких частин поверхні лопатки та розподілення швидкості або тиску на інших частинах поверхні лопатки. Необхідно визначити форму поверхні лопатки в межах каналу.

Задачи аэродинамики традиционно разделяют на прямые и обратные задачи. При практическом проектировании лопаточных решеток турбомашин обратная задача используется редко. В рамках описания течения уравнениями Эйлера при использовании обратной задачи, позволяющей по заданным распределениям давления на поверхности лопатки и геометрическим ограничениям определять форму лопаток, много неясного остается в вопросах единственности и существования решений. Поэтому чаще всего лопаточные решетки проектируются на основе итерационного решения прямой задачи. В настоящее время сформировался новый класс задач – гибридных задач. Гибридные задачи можно сформулировать многими способами, потому что они характеризуются именно тем, что одни граничные условия на поверхности лопатки – геометрические, а другие – аэродинамические. Например: заданы форма некоторой части поверхности и распределение скорости (или давления) на остальной поверхности (тип A); заданы распределения разности давлений на двух противоположных поверхностях и расстояния между ними (тип B); заданы распределение расстояния между двумя противоположными поверхностями и распределение давления на одной из них (тип C). Поэтому такие задачи являются унификацией и обобщением прямой и обратной задач [1].

В данной статье предлагается постановка и метод решения гибридной задачи типа A в слое конечной толщины h на поверхности вращения S_1. Течение предполагается установившимся относительно лопаток и изоэнтропическим. Математическая модель течения включает в себя следующие уравнения, записанные в цилиндрической системе координат ($\theta,\ r,\ z$):

— уравнения сохранения энергии и изоэнтропийного процесса расширения вдоль линии тока

$$i^*_{W_1} = \frac{k}{k-1} P\upsilon + \frac{W^2}{2}, \qquad (1)$$

$$P\upsilon^k = const; \qquad (2)$$

— систему уравнений, эквивалентную уравнению неразрывности для слоя толщиной h, предполагая, что все величины вдоль h не изменяются

$$W_u = -\frac{\upsilon}{h}\frac{\partial G}{\partial z}, \quad W_z = \frac{\upsilon}{hr}\frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad \frac{W_u}{W_z} = ctg\,\beta = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big/\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial \theta}, \tag{3}$$

где $G(\theta,r,z) = m\Psi(\theta,r,z)$ – функция массового расхода, m – массовый расход, Ψ – функция тока, $\Psi \in [0,\, 1]$, β – угол потока на поверхности вращения S_1;

— уравнение количества движения в проекции на осевое направление

$$W_r\frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r}\frac{\partial W_z}{\partial \theta} + W_z\frac{\partial W_z}{\partial z} = -\upsilon\frac{\partial P}{\partial z}; \tag{4}$$

— уравнение количества движения в проекции на окружное направление

$$W_r\frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r}\frac{\partial W_u}{\partial \theta} + W_z\frac{\partial W_u}{\partial z} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r = -\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}, \tag{5}$$

где ω – угловая скорость, рад/с.

Если в приведенных выше уравнениях полагать, что ω=0, $W = C$, $\beta = \alpha$, $i^*_{W_1} = i^*_{C_0}$, то получим систему уравнений, описывающих обтекание неподвижной решетки на поверхности S_1. В рамках данной статьи рассмотрим только случай цилиндрической поверхности вращения. Для любых других поверхностей вращения постановки задач расчета течения и методы их решения принципиально не изменятся.

В основу постановки и метода решения гибридных задач положены постановка и метод решения прямой задачи расчета течения в слое h межлопаточного канала, которые подробно изложены в [2]. Прямая задача сформулирована так: при заданных массовом расходе через слой m, параметрах рабочего тела перед каналом или за каналом (полные давление P^* и удельный объем υ^*), уравнениях геометрических границ (в радианах) стороны разряжения $\varphi_s = \varphi_s(z)$ и стороны давления $\varphi_p = \varphi_p(z)$ определить в любой точке сечений слоя $z = const$ в межлопаточном канале параметры рабочего тела.

Для сечения $z = z_i$ выбирается функция, аппроксимирующая функцию тока в некоторой малой окрестности этого сечения,

$$\Psi(\theta,z) = \frac{\overline{F}^{\,y} + x(\theta,z)\overline{F}}{1 + x(\theta,z)\overline{F}}, \quad \overline{F}(\theta,z) = \frac{\theta - \varphi_s(z)}{\varphi_p(z) - \varphi_s(z)}, \quad \varphi_s(z) \le \theta \le \varphi_p(z), \quad 0 \le \overline{F}(\theta,z) \le 1 \tag{6}$$

Здесь y – вещественное число, $x(\theta,z)$ – непрерывная дважды дифференцируемая положительно определенная функция. Если положить, что функция $x(\theta,z) = f(\theta,\ a_0(z),\ a_1(z), \ldots,\ a_l(z))$, то $a_0(z_i),\ a_1(z_i), \ldots, a_l(z_i)$, $\frac{\partial a_0(z_i)}{\partial z}, \frac{\partial a_1(z_i)}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial a_l(z_i)}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 a_0(z_i)}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 a_1(z_i)}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial^2 a_l(z_i)}{\partial z^2}$ – вещественные числа. Поэтому $\Psi(\theta,z)$ – функция $3l+1$ (с учетом y) вещественной переменной. В сечении $z = z_i$ выберем $N >> 3l$

равноотстоящих точек θ_j, $j=\overline{1,N}$. Для всех точек θ_j можно записать равенства, следующие из (1) и (3),

$$\frac{2k}{k-1}\left(P^*\upsilon^*-P\upsilon\right)=\left(m\,\frac{\upsilon}{h}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2\right] \text{ или}$$

$$m=\frac{h}{\upsilon}\sqrt{\left[\frac{2k}{k-1}\left(P^*\upsilon^*-P\upsilon\right)\right]\bigg/\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2\right]}. \qquad (7)$$

Если задать значения переменных функции (6), тогда, используя выражение (7) для одной из точек $\theta_1=\varphi_s(z_i)$ или $\theta_N=\varphi_p(z_i)$ на границе сечения, находим давление P в этих точках. Для нахождения давления решается задача одномерной оптимизации [3], у которой целевая функция – квадрат разности правой и левой частей равенства (7). После этого решаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}=\frac{\upsilon\left[\left(M_{W_z}^2-1\right)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\frac{\partial G}{\partial\theta}-\frac{\partial^2 G}{\partial\theta\,\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\right)-M_{W_z}^2\frac{\partial G}{\partial z}\left(\frac{ctg\beta}{R}\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial\theta\,\partial z}\right)\right]}{h^2\left(M_{W_z}^2-1\right)+\frac{\upsilon^2}{a^2}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2}, \qquad (8)$$

которое получено из уравнений (2) – (5), как задачу Коши $\frac{dP}{d\theta}=f(\theta,P)$ на интервале $[\varphi_s(z_i),\varphi_p(z_i)]$. Здесь $a=\sqrt{kP\upsilon}$ – скорость звука, а M_{W_z} – число Маха по скорости W_z.

Если значения переменных функции $\Psi(\theta,z)$ выбраны правильно, то в каждой точке θ_j, $j=\overline{1,N}$ условие (7) выполнится. Итак, задача расчета течения в сечении $z=const$ рассматривается как задача оптимизации, у которой целевая функция – сумма квадратов разности правой и левой частей равенства (7) во всех точках θ_j, $j=\overline{1,N}$, независимые переменные – переменные функции $\Psi(\theta,z)$. Задача оптимизации решается методом Нелдера и Мида [3]. Чтобы рассчитать весь межлопаточный канал, мы должны решить сформулированную выше задачу для некоторого числа сечений $z=z_i$ канала, задаваемых в произвольном порядке. Решение задачи расчета течения в одном сечении никак не зависит от решения задачи в другом и, таким образом, решать задачи можно одновременно при наличии многопроцессорной вычислительной техники.

Основные идеи рассмотренного метода решения прямой задачи используем для решения гибридных задач. Пусть известны осевые координаты начала и конца межлопаточного канала z_a и z_d ($z_a<z_b<z_c<z_d$). Гибридная задача расчета течения в слое h может быть сформулирована, например, следующим образом. Задаются:
1) массовый расход через слой m; 2) параметры рабочего тела перед каналом или за каналом (полные давление P^* и удельный объем υ^*); 3) геометрическая граница стороны разряжения $\varphi_s=\varphi_s(z)$, где $z_a\le z\le z_d$; 4) две части геометрической границы

стороны давления $\varphi_p = \varphi_p(z)$, где $z_a \le z \le z_b$ или $z_c \le z \le z_d$; 5) функция, определяющая скорость потока на стороне давления канала $W = W(z)$, где $z_b < z < z_c$. Необходимо найти геометрическую границу стороны давления $\varphi_p = \varphi_p(z)$ для $z_b < z < z_c$.

Выберем n равноотстоящих сечений $z = const$ межлопаточного канала на участке $z_b < z < z_c$: z_1, … z_i, … z_n. Для точки на границе канала $\theta_N = \varphi_p(z_i)$, $i = \overline{1, n}$ по условию гибридной задачи известна функция, определяющая скорость потока $W = W(z)$. Для функции скорости потока справедливы два равенства

$$W^2 = W_z^2 + W_u^2, \qquad W\frac{dW}{dW} = W_z\frac{dW_z}{dz} + W_u\frac{dW_u}{dz}. \tag{8}$$

После преобразования выражений (8) с учетом (2), (3) и соотношений

$$\frac{d\upsilon}{dz} = -\frac{\upsilon^2}{a^2}\frac{dP}{dz}, \quad \frac{dW_z}{dz} = \frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{ctg\beta}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}, \quad \frac{dW_u}{dz} = \frac{\partial W_u}{\partial z} + \frac{ctg\beta}{r}\frac{\partial W_u}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial W_u}{\partial\theta} = -\frac{1}{h}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}\frac{\partial G}{\partial z} + \upsilon\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\theta}\right), \quad \frac{\partial W_u}{\partial z} = -\frac{1}{h}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} + \upsilon\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)$$

получим:

$$W^2 - \frac{\upsilon^2}{h^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{9}$$

$$\left(M_W^2 - 1\right)\frac{dP}{dz} - \frac{\upsilon}{h^2 R}\frac{\partial G}{\partial\theta}\left[ctg\beta\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\theta}\left(1 - ctg^2\beta\right)\right] = 0. \tag{10}$$

Давление P, $\frac{dP}{dz}$ и удельный объем υ легко найти из уравнений (1) и (2):

$$P = B\left(i_{W1}^* - \frac{W^2}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{dP}{dz} = B\frac{k}{k-1}\left(i_{W1}^* - \frac{W^2}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(-W\frac{dW}{dz}\right), \text{ где } B = \left[\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{\upsilon^*}\left(P^*\right)^{-\frac{1}{k}}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Если переменные функции (6) заданы, тогда система уравнений (9) и (10) – система двух алгебраических уравнений с тремя неизвестными φ_p, $\frac{d\varphi_p}{dz}$, $\frac{d^2\varphi_p}{dz^2}$. Если задать одно из неизвестных, то эта система уравнений решается аналитически.

В сечении z_b величины $\varphi_p^{(b)}$, $\frac{d\varphi_p^{(b)}}{dz}$, $\frac{d^2\varphi_p^{(b)}}{dz^2}$ известны. В сечении z_1 определим величину $\varphi_p^{(1)}$, используя ряд Тейлора $\varphi_p^{(1)} = \varphi_p^{(b)} + (z_1 - z_b)\frac{d\varphi_p^{(b)}}{dz} + \frac{1}{2}(z_1 - z_b)^2\frac{d^2\varphi_p^{(b)}}{dz^2}$, и решим задачу оптимизации: найдем такие значения переменных функции (6), которые доставляют минимум сумме квадратов разности правой и левой частей равенства (7) всех точек θ_j, $j=\overline{1,N}$. Отметим, что в процессе оптимизационного поиска для каждого нового вектора независимых переменных мы вычисляем величины $\frac{d\varphi_p^{(1)}}{dz}$ и $\frac{d^2\varphi_p^{(1)}}{dz^2}$, используя уравнения (9) и (10), и в результате решения задачи оптимизации определяем не только параметры течения, но и производные функции $\varphi_p=\varphi_p(z)$. Это дает возможность вычислить величину $\varphi_p^{(2)}$, используя ряд Тейлора, и решить задачу расчета течения в сечении z_2. Переходим к следующему сечению z_3 и так далее до средины участка $z_b<z<z_c$. Одновременно с решением этих задач решим задачи оптимизации для сечений в порядке убывания номеров до середины отрезка $z_b<z<z_c$, начиная с сечения z_n. Для этого воспользуемся заданными по условию гибридной задачи в сечении z_c величинами $\varphi_p^{(c)}$, $\frac{d\varphi_p^{(c)}}{dz}$, $\frac{d^2\varphi_p^{(c)}}{dz^2}$.

После расчета течения во всех сечениях z_1, … z_i, … z_n мы получим для каждого из них значения функции $\varphi_p=\varphi_p(z)$ и ее производных. Задачу нахождения непрерывной функции границы канала на участке $z_b<z<z_c$ рассматриваем как краевую задачу. Согласно теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно аппроксимировать со сколь угодно высокой точностью алгебраическими многочленами. Для получения коэффициентов многочленов используется метод Рица, в котором эта задача сводится к решению системы линейных уравнений [4].

Итак, гибридные задачи расчета параметров течения в слое конечной толщины в межлопаточных каналах, часть границ которых задана геометрически, а вдоль других частей границ известно распределение скорости или распределение давления, рассматриваются авторами статьи как выбираемое множество задач расчета течения в сечениях $z=const$ слоя. Задача расчета течения в отдельном сечении сформулирована как задача оптимизации и решается методами нелинейного программирования. В задаче расчета параметров течения в отдельном сечении два граничных условия могут быть одинаковыми или разными: геометрическими (прямая задача), геометрическим и аэродинамическим (гибридная задача) или аэродинамическими (обратная задача).

Литература

1. Liu Gao-lian A Unified Theory of Hybrid Problems for Fully Three-Dimensional Incompressible Rotor Flow Based on Variational Principles with Variable Domain // Trans. ASME: J. Eng. Gas Turbine and Power. – 1986. – 108. – № 2. – p. 254-258.

2. Субботович В.П., Юдин А.Ю. Задача расчета скорости на поверхности лопатки турбомашины как задача оптимизации // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 12. – с. 101-106.

3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: «Мир». – 1975. – 534 с.

4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: «Наука». – 1978. – 512 с.