

УДК 621.165:621.438

В.М. ПУСТОВАЛОВ, канд. техн. наук, Д.А.ЧИЖЕВ

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
м. Харків, Україна

ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗРАХУНКУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СТРИЖНЯ, ЩО ЗАКРІПЛЕНИЙ З ОДНОГО КІНЦЯ

Приближённое решение задачи расчёта температурного поля стержня широко используется в различных областях теплотехники. В статье предложены критерии оценки погрешности, вызванной упрощающим допущением, используемым при решении этой задачи.

The approximate prediction of a temperature field of a bar is widely used in various areas of heat engineering. In the paper, the error estimation caused by using of simplifying assumption is putting forward.

Задача, що розглядається, є початковим модельним наближенням до розрахунку температурного поля елементів теплових двигунів та інших теплотехнічних пристроїв. Це, наприклад, робочі лопатки парової або газової турбіни, коли тепловий потік від робочого тіла відводиться у тіло диска, як у паровій турбіні, або до охолоджуючого повітря, що продувається через монтажні зазори хвостового з'єднання лопатки з диском, у газовій турбіні, теплопередача через поверхню, що має ребра, і т.п.

У означеному аспекті ця задача розглядалась у низці публікацій, наприклад у [1, 2], але в них, на наш погляд, було недостатньо представлено аналіз критеріїв, що визначають межі користування наближеним розв'язанням задачі. Можливий варіант такої оцінки пропонуються в даній роботі.

Постановка задачі

Схема системи та застосовані позначення представлені на рис. 1.

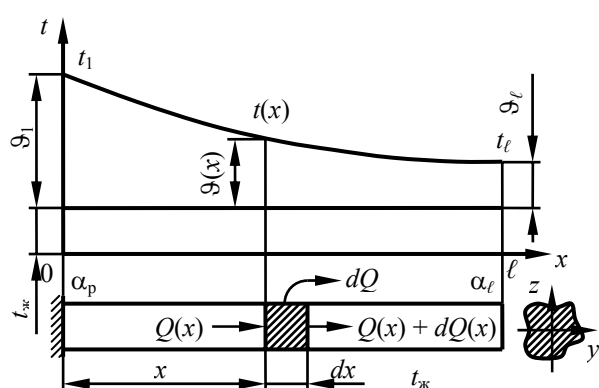


Рис. 1. Схема системи та застосовані позначення

Тут f – площа поперечного перерізу стрижня (прийнято $f = \text{const}$); u – його периметр; dQ_p – тепловий потік з бокової поверхні стрижня; t_1 , t_l – температури на початку і в кінці стрижня, α_p , α_l – коефіцієнти тепловіддачі на боковій поверхні стрижня та на поверхні його торця, $\theta = t - t_{\text{ж}}$ – температура, що відраховується від температури рідини.

У загальному вигляді маємо 3-вимірну задачу теплопровідності, тобто $t = t(x, y, z)$, де x – координата,

спрямована по довжині стрижня, y, z – координати точок поперечного перерізу стрижня.

Традиційно припустимо, що через малий розмір поперечного перерізу можна зневажати зміною температури у ньому і ввести до розгляду деяку середню температуру, тобто прийняти, що $t = t(x)$. Оцінка можливих похибок при цьому припущенні аналізується у роботі [3].

Після введення середньої по перерізу температури вже не можна користуватися *точним* рівнянням теплопровідності. *Наближене* рівняння теплопровідності, що одержано на основі теплового балансу елемента стрижня довжиною dx , для нової змінної має вигляд.

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - m^2(t - t_{ж}) = 0, \quad (1)$$

де

$$m^2 = \frac{\alpha_p u}{\lambda f}. \quad (2)$$

З другого боку, якщо розглядати потік dQ_p як дію умовних розподілених джерел теплоти з об'ємною продуктивністю

$$q_v = \frac{dQ_p}{dV} = \frac{\alpha_p(t - t_{ж})u dx}{f dx} = \frac{\alpha_p u(t - t_{ж})}{f}, \quad (3)$$

то скористувавшись *точним* рівнянням теплопровідності при наявності розподілених джерел теплоти для одномірного випадку у вигляді

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad (4)$$

одержимо

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\alpha_p u}{\lambda f}(t - t_{ж}) = 0, \quad (5)$$

тобто рівняння, що тотожне (1).

Після переходу до змінної ϑ крайова задача має вигляд:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - m^2 \vartheta = 0, \quad (6)$$

$$x = 0 \quad \vartheta = t - t_{ж} = \vartheta_1, \quad (7)$$

$$x = \ell \quad -\lambda \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\ell} = \alpha \vartheta_\ell. \quad (8)$$

Її загальний розв'язок

$$\vartheta = C_1 \text{sh}(mx) + C_2 \text{ch}(mx). \quad (9)$$

Після використання граничних умов, та деяких перетворень одержимо

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{\operatorname{ch}[m(\ell - x)] + \frac{\alpha_\ell}{\lambda m} \operatorname{sh}[m(\ell - x)]}{\operatorname{ch}(m\ell) + \frac{\alpha_\ell}{\lambda m} \operatorname{sh}(m\ell)}, \quad (10)$$

що є точним розв'язком крайової задачі (6)–(8).

Подальше спрощення розв'язку та його аналіз

Потік теплоти від стержня у навколишнє середовище дорівнює тепловому потоку, що підводиться до місця його закріплення, тобто

$$Q = -\lambda f \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = \lambda m f \vartheta_1 \frac{\operatorname{sh}(m\ell) + \frac{\alpha_\ell}{\lambda m} \operatorname{ch}(m\ell)}{\operatorname{ch}(m\ell) + \frac{\alpha_\ell}{\lambda m} \operatorname{sh}(m\ell)}. \quad (11)$$

З другого боку, його можна визначити через приведений коефіцієнт тепловіддачі згідно з рівнянням

$$Q = \alpha_{\text{пр.р}} \vartheta_1 f. \quad (12)$$

Поєднуючи (11) та (12), одержимо

$$\alpha_{\text{пр.р}} = \lambda m \frac{\operatorname{th}(m\ell) + \frac{\alpha_\ell}{\lambda m}}{1 + \frac{\alpha_\ell}{\lambda m} \operatorname{th}(m\ell)}. \quad (13)$$

Якщо вплив теплообміну на кінці стержня на його температурне поле за умов задачі є мінімальним, то можна знехтувати другими додатками в чисельнику та знаменнику у (13) і мати вираз

$$\alpha'_{\text{пр.р}} = \lambda m \cdot \operatorname{th}(m\ell). \quad (14)$$

Погрішність при знехтуванні теплопідводом на торцевому перетині стрижня будемо характеризувати коефіцієнтом

$$k = \frac{\alpha_{\text{пр.р}}}{\alpha'_{\text{пр.р}}} = \frac{\operatorname{th}(m\ell) + \frac{\operatorname{Bi}_\ell}{m\ell}}{\operatorname{th}(m\ell) + \frac{\operatorname{Bi}_\ell}{m\ell} \cdot \operatorname{th}^2(m\ell)}, \quad (15)$$

де

$$\operatorname{Bi}_\ell = \frac{\alpha_\ell \ell}{\lambda}, \quad (16)$$

тобто

$$k = f(ml, Bi_\ell). \quad (17)$$

Рівняння (15) дає змогу оцінити для умов конкретної задачі можливу похибку при розрахунку приведенного коефіцієнта тепловіддачі, якщо застосовується наближений вираз (14).

Приклад такої оцінки і тенденції впливу на неї аргументів ml та Bi_ℓ можна побачити на графіках рис. 2.

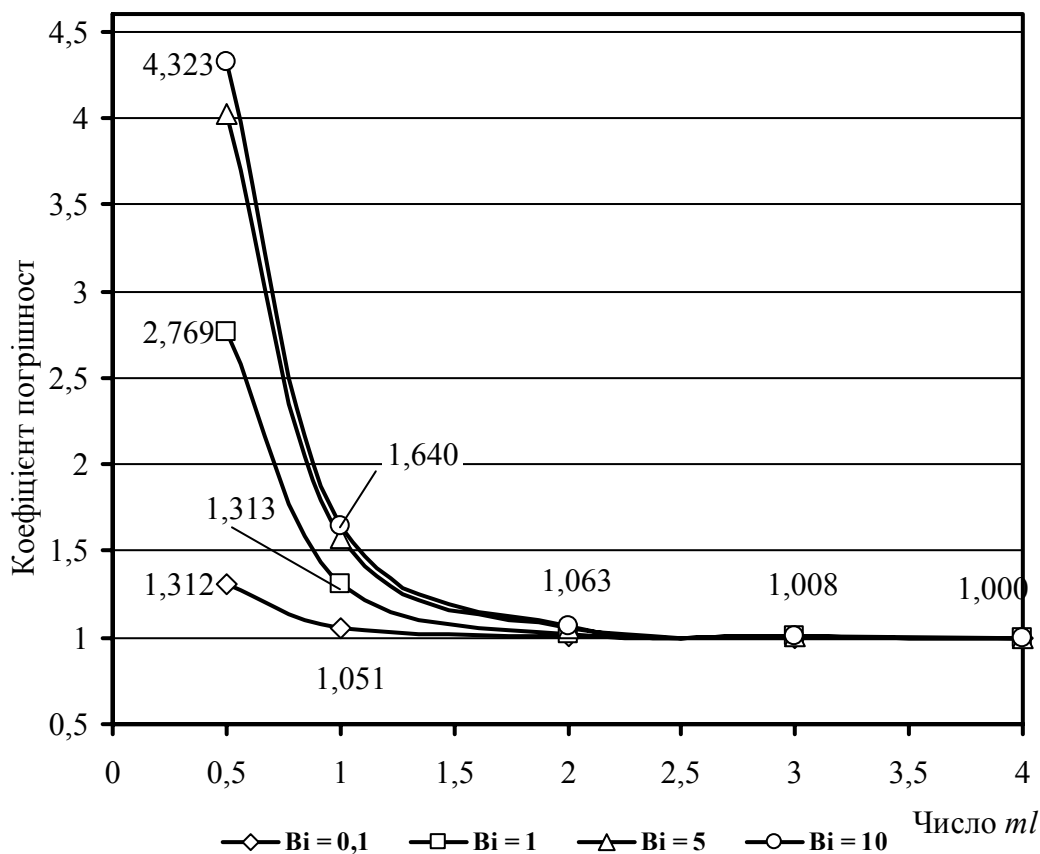


Рис. 2. Залежність коефіцієнта k від чисел Bi_ℓ та ml

Література

1. Жирицкий Г.С. Газовые турбины двигателей летательных аппаратов / Г.С. Жирицкий, В.И. Локай, М.К. МаксUTOва, В.А. Стрункин. – М.: Машиностроение, 1971.
2. Исаченко В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергоиздат, 1981.
3. Капинос В.М. О приближённом решении задач теплопроводности для турбинных деталей // Энергетическое машиностроение. – 1970. – Вып. 9. – С. 10-17.

© Пустовалов В.М., Чижев Д.А., 2009