УДК 621.165

Г.А. ГАПОН

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина

ДИНАМИКА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В межах концепції суцільного середовища змінної маси створена математична модель вихрової течії змінної маси. В цій моделі використані вперше виведені рівняння для вихору, що є аналогами та узагальненнями на випадок руху зі змінною масою рівнянь Громеки – Лемба та Фридмана. Вона може бути застосована для постановки задач розрахунку вихрових течій зі змінною витратою вздовж каналу, зв'язаних із змішанням та розділенням потоків, наприклад, в парових та газових турбінах, в спіральних камерах відцентрових турбомашин [1] та іншому устаткуванні.

The mathematical model of the variable mass' vortical motion is created according to the variable mass concept in the continuous medium. The equations for vortex in the case of the variable mass continuous medium motion are derived for the first time. These equations are analogs and generalizations of the Gromeka – Lamb and Fridman equations in case of variable mass motion. The model can be applied for statement of the problem of vortical motion calculation, when fluid flow rate is changing along the channel. Variable fluid flow rate can be caused by the working medium masses attachment and detachment, which take place in steam and gas turbines, scroll cases of centrifugal turbines [1], etc.

Во многих технических устройствах имеют место течения рабочей среды, сопровождающиеся присоединением или отсоединением рабочего тела вдоль пути. Таковы, например, течения в камерах отборов, входных и выходных патрубках, спиральных камерах и других элементах паровых и газовых турбин, центробежных турбомашин, насосов и вентиляторов и многих других типов оборудования.

Упомянутые течения обладают двумя общими особенностями: 1) наличием переменного вдоль канала расхода рабочей среды и 2) динамическим взаимодействием потоков, происходящим при смешении (или разделении) их вдоль пути. Исходя из учета указанных особенностей рассматриваемых течений, для создания математической модели последних будет естественным обратиться к законам динамики сплошной среды переменной массы [2]. Во-первых, они описывают движение жидкости с переменным расходом, и во-вторых, позволяют выявить и учесть характер взаимодействия потоков при их слиянии или разделении и его влияние на параметры результирующего течения.

Как показывает опыт, движение среды в упомянутых каналах носит вихревой характер. Это значит, что вектор вихря $\vec{\Omega}$ во всех точках области течения или ее части не равен нулю: rot $\vec{V} = \vec{\Omega} \neq 0$. Чтобы учесть этот фактор, математическую постановку задачи расчета вихревых течений в каналах со смешением (разделением) потоков будем строить на базе уравнений динамики переменной массы для вихревых течений. Теоретический аппарат для таких расчетов еще не разработан. Поэтому выведем два уравнения динамики вихревых течений переменной массы. Они будут аналогами и обобщениями известных уравнений Громеки – Лэмба и Фридмана на случай движения с переменной массой.

Уравнение Громеки – Лэмба для течений с переменной массой

Рассмотрим уравнение движения переменной массы

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\mathrm{c}} \mathrm{grad}\, P + \frac{I}{\mathrm{c}}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right), \tag{1}$$

где ρ – плотность, P – давление, $\vec{V}$ – вектор скорости потока, $\vec{V}_0$ – вектор скорости, с которой жидкость подводится (отводится), I – секундное изменение массы вещества в данной точке потока, отнесенное к единице его объёма, $\vec{F}$ – массовая сила, отнесенная к единице массы.

Воспользовавшись известным тождеством $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \mathrm{grad}\left(\vec{V}^2/2\right) - \vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V}$, это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\vec{V}^2/2\right) - \vec{V}\times\mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, P + \frac{I}{\rho}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right). \tag{2}$$

Данное уравнение является уравнением Громеки – Лэмба для случая движения среды с переменной массой.

Отдельный класс вихревых движений составляют движения, при которых

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \lambda\vec{V}, \tag{3}$$

где λ – в общем случае скалярная функция координат.

Такие движения называются винтовыми [3]. Из (3) вытекает, что $\vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V} = 0$, и уравнение (2) в случае винтового движения имеет вид

$$\mathrm{grad}\left(\vec{V}^2/2\right) = \vec{F} - \frac{1}{\mathrm{c}}\mathrm{grad}\, P + \frac{I}{\mathrm{c}}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right). \tag{4}$$

Уравнение Фридмана для течений с переменной массой

Получим уравнение, описывающее изменение вихря в течениях с переменной массой. Будем исходить из уравнения Громеки – Лэмба для течений с переменной массой (2). Найдём ротор от обеих частей этого уравнения. Тогда

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \mathrm{rot\ grad}\left(\vec{V}^2/2\right) - \mathrm{rot}\left(\vec{V}\times\mathrm{rot}\vec{V}\right) = \mathrm{rot}\,\vec{F} - \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, P\right) + \mathrm{rot}\left(\frac{I}{\rho}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right)\right). \tag{5}$$

Упростим уравнение (5), используя соотношения

$$\mathrm{rot}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}; \tag{6}$$

$$\mathrm{rot}\left(\alpha\,\vec{A}\right) = \alpha\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\,\alpha\times\vec{A}; \tag{7}$$

$$\mathrm{rot\,grad}\,\vec{B} = 0; \tag{8}$$

$$\mathrm{div\,rot}\,\vec{C} = 0. \tag{9}$$

Из формулы (8) следует, что

$$\mathrm{rot\ grad}\left(\vec{V}^2/2\right) = 0. \tag{10}$$

Из формул (6) и (7) получим

$$\mathrm{rot}\,(\vec{V}\times\mathrm{rot}\vec{V}) = (\vec{\Omega}\cdot\nabla)\,\vec{V} - \vec{\Omega}\,\mathrm{div}\vec{V} - (\vec{V}\cdot\nabla)\,\vec{\Omega}. \tag{11}$$

Из формул (7) и (8) будем иметь

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, P\right) = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\mathrm{grad}\,P = -\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{grad}\,\rho\times\mathrm{grad}\,P. \tag{12}$$

Подставляя (10), (11), (12) в (5), получим

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{\Omega} - \left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\vec{V} + \vec{\Omega}\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \mathrm{rot}\,\vec{F} + \frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}\,\rho\times\mathrm{grad}\,P + \mathrm{rot}\left(\frac{I}{\rho}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right)\right). \tag{13}$$

Уравнение (13) является уравнением Фридмана для течения с переменной массой.

Рассмотрим частный случай для последнего уравнения. Пусть поле массовых сил консервативно ($\vec{F} = -\mathrm{grad}U$, $U -$ потенциал поля), жидкость – баротропна ($\rho = \psi(P)$). Тогда $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, $\mathrm{grad}\,\rho \times \mathrm{grad}\,P = \psi'(P)\,\mathrm{grad}\,P \times \mathrm{grad}\,P = 0$, а уравнение Фридмана получает вид

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega}\cdot\nabla)\,\vec{V} + \vec{\Omega}\,\mathrm{div}\vec{V} = \mathrm{rot}\left(\frac{I}{\rho}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right)\right). \tag{14}$$

Отметим, что в большом числе приложений данное упрощение оправдано: массовые силы являются консервативными или ими можно пренебречь, а плотность зависит только от давления или может считаться постоянной, так как течения происходят с числами Маха M < 0,3.

Составим систему уравнений для описания вихревого течения с переменной массой в условиях консервативности массовых сил и баротропности жидкой среды. Она состоит из уравнения неразрывности, уравнения Фридмана или Громеки – Лэмба, определения вихря $\vec{\Omega}$ и условия баротропности жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right) = I; \\ \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} - \left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\vec{V} + \vec{\Omega}\mathrm{div}\vec{V} = \mathrm{rot}\left(\dfrac{I}{\rho}\left(\vec{V}_0 - \vec{V}\right)\right); \\ \vec{\Omega} = \mathrm{rot}\vec{V}; \\ \rho = \psi(P). \end{cases} \tag{15}$$

Эта система уравнений замкнута. Граничные условия зависят от конкретной задачи.

Итак, из вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1) Выведены впервые уравнения для вихря, которые являются аналогами и обобщениями уравнений Громеки – Лэмба и Фридмана на случай движения с переменной массой.

2) С их помощью впервые в рамках концепции переменной массы построена математическая модель расчёта вихревых течений с переменной массой. Получена замкнутая система уравнений, которая описывает такие течения при условиях консервативности массовых сил и баротропности жидкой среды.

3) Приведенная математическая модель может быть применена в расчетах вихревых течений со смешением или разделением потоков вдоль канала, широко встречающихся в турбомашинах. Например, с ее помощью можно рассчитать параметры вихревого течения в спиральной камере центробежной турбомашины.

Литература

1. *Гапон Г.А.* Динамика переменной массы в каналах сложной формы // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – № 5. – С. 144–149.

2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

3. *Васильев О.Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. – Госэнергоиздат, 1958. – 144 с.