УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук; проф. НТУ «ХПИ», г. Харьков
С.А. ТЕМЧЕНКО, м.н.с. НТУ «ХПИ», г. Харьков

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОСЕВОГО КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА

Описано новий метод розв'язування оберненої задачі розрахунку закрученої вісесиметричної течії ідеального газу у вільному осьовому кільцевому каналі. Метод спеціально розроблений для використання в задачах оптимального проектування проточних частин турбомашин: враховує особливості організації оптимального пошуку та дозволяє істотно розпаралелити обчислювальні процеси.

The new problem-solving procedure of swirl ideal gas axial-symmetric flow inverse problem for the free axial ring duct is described. The procedure specially is developed for use in optimum designing problems of turbomachines flowing pass and take into account features of the optimum alternative organisation and allows essentially paralleling computing processes.

Для различных технических устройств турбомашин, таких как переходные каналы турбореактивных двигателей, выхлопные патрубки, элементы камер сгорания и системы подвода рабочего тела к первым ступеням, важной проблемой является проектирование осевых кольцевых каналов.

Рассматривается осевой кольцевой канал, в котором сжимаемое рабочее тело полагается невязким, течение установившимся, закрученным, адиабатическим и безотрывным, а полная энтальпия, энтропия и показатель изоэнтропы остаются постоянными вдоль линии тока. Система координат – неподвижная цилиндрическая (φ, R, Z), где φ – полярный угол, R – радиальное направление, Z – осевое направление, совпадающее с осью канала.

Течение в канале описывается следующей системой уравнений:

1) Уравнение сохранения энергии вдоль линии тока

$$\frac{k}{k-1} p^* v^* = \frac{k}{k-1} pv + \frac{C^2}{2}, \tag{1}$$

где p^*, v^* – полные давление и удельный объем, а $C^2 = C_Z^2 + C_R^2 + C_U^2$.

2) Уравнение изоэнтропийного процесса вдоль линии тока

$$p^* \left(v^*\right)^k = pv^k = \text{const}. \tag{2}$$

3) Три уравнения, эквивалентные уравнению неразрывности

$$C_Z = \frac{v}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial R}; \qquad C_R = -\frac{v}{2\pi R} \frac{\partial G}{\partial Z}; \qquad \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\partial G}{\partial Z} \bigg/ \frac{\partial G}{\partial R}, \tag{3}$$

где $G(Z, R)$ – функция массового расхода.

4) Проекция уравнения количества движения на радиальное направление

$$C_R \frac{\partial C_R}{\partial R} + C_Z \frac{\partial C_R}{\partial Z} - \frac{C_U^2}{R} = -v \frac{\partial p}{\partial R}. \quad (4)$$

5) Проекция уравнения количества движения на осевое направление

$$C_R \frac{\partial C_Z}{\partial R} + C_Z \frac{\partial C_Z}{\partial Z} = -v \frac{\partial p}{\partial Z}. \quad (5)$$

6) Проекция уравнения количества движения на окружное направление

$$C_R \frac{\partial C_U}{\partial R} + C_Z \frac{\partial C_U}{\partial Z} + \frac{C_U C_R}{R} = 0, \quad (6)$$

из которого следует

$$C_U R = \text{const}. \quad (7)$$

Преобразуем эту систему уравнений к системе уравнений меньшей размерности, как показано в работе [1]. После чего окончательно получим систему уравнений, в которую входят уравнения (1), (6) и (8)

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{1 - M_{C_Z}^2}{1 - M_{C_Z}^2 - M_{C_R}^2} \frac{v}{(2\pi R)^2} \frac{\partial G}{\partial R} \left[\frac{M_{C_Z} M_{C_R}}{1 - M_{C_Z}^2} B_1 - B_2 \right] + \frac{C_U^2}{v R}, \quad (8)$$

где $M_{C_Z} = C_Z / a$, $M_{C_R} = C_R / a$ – числа Маха, определенные по осевой и радиальной составляющим скорости потока; $a = \sqrt{kpv}$ – скорость звука; $B_1 = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial G}{\partial R} - \frac{\partial^2 G}{\partial R^2} \right) \text{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial R \partial Z}$, $B_2 = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial G}{\partial Z} - \frac{\partial^2 G}{\partial Z \partial R} \right) \text{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2}$.

Рассмотрим постановку и метод решения обратной задачи.

Задается:

1) массовый расход через канал m;

2) полные давления p^* и удельный объем v^*;

3) распределение по радиусу окружной составляющей скорости потока на входе в канал;

4) уравнение $R = R_m(Z)$, задающее геометрию одной из линий тока внутри канала;

5) уравнение $C = C_m(Z)$, задающее распределение скорости вдоль выбранной линии тока.

Необходимо определить на меридиональной плоскости:

1) внутреннюю и наружную границы канала $R_k = R_k(Z)$ и $R_p = R_p(Z)$;

2) распределение параметров рабочего тела внутри канала.

Зададим множество сечений на меридиональной плоскости канала $Z = \text{const}$, $Z_0 < Z_1 < ... < Z_i < Z_{i+1} < ... < Z_l$, которые покрывают её с достаточной густотой. Задачу расчета течения для одного сечения $Z = \text{const}$ назовем частной задачей. И для каждой частной задачи будем полагать известными $\frac{dR_m(Z)}{dZ}$, $\frac{d^2R_m(Z)}{dZ^2}$, $\frac{d^3R_m(Z)}{dZ^3}$, $\frac{dC_m(Z)}{dZ}$ и $\frac{d^2C_m(Z)}{dZ^2}$. Очевидно, что решение всех частных задач, будет решением задачи, сформулированной выше.

Частную задачу можно разделить на две подзадачи: подзадачу определения внутренней границы канала и подзадачу определения наружной границы канала. Первая подзадача: для части массового расхода m_1 найти внутреннюю границу канала $R_k = R_k(Z)$ и определить распределение параметров рабочего тела между линией тока, заданной уравнением $R = R_m(Z)$, и внутренней границей канала $R_k = R_k(Z)$. Вторая подзадача: для части массового расхода $m_2 = m - m_1$ найти наружную границу канала $R_p = R_p(Z)$ и определить распределение параметров рабочего тела между линией тока, заданной уравнением $R = R_m(Z)$, и наружной границей канала $R_p = R_p(Z)$.

Рассмотрим только первую подзадачу, так как обе подзадачи имеют один и тот же вычислительный алгоритм.

В сечении $Z = Z_i$ выберем N равностоящих точек $R_j, j = \overline{1, N}$. В точке на линии тока $R_1 = R_m(Z_j)$ определяем статическое давление p_m из уравнения (1)

$$p_m = \left[\frac{k-1}{kv^*}\left(p^*\right)^{-\frac{1}{k}}\right]^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{k}{k-1}p^*v^* - \frac{C_m^2}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (9)$$

Для точки $R_1 = R_m(Z_j)$ по условию подзадачи известна функция $C = C_m(Z)$, определяющая скорость потока. Для скорости потока справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} C^2 - C_R^2 - C_Z^2 - C_U^2 = 0; \\ C\frac{dC}{dZ} - C_R\frac{dC_R}{dZ} - C_Z\frac{dC_Z}{dZ} - C_U\frac{dC_U}{dZ} = 0; \\ \left(\frac{dC}{dZ}\right)^2 + C\frac{d^2C}{dZ^2} - \left(\frac{dC_Z}{dZ}\right)^2 - C_Z\frac{d^2C_Z}{dZ^2} - \left(\frac{dC_R}{dZ}\right)^2 - C_R\frac{d^2C_R}{dZ^2} - \left(\frac{dC_U}{dZ}\right)^2 - C_U\frac{d^2C_U}{dZ^2} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Введем функцию массового расхода $G(Z,R) = m\Psi(Z,R)$, где $\Psi(Z,R)$ – безразмерная функция тока. В качестве безразмерной функции тока использовалась функция следующего вида:

$$\Psi(Z,R) = \frac{\overline{F}(Z,R) + x(Z,R)\,\overline{F}(Z,R)}{1 + x(Z,R)\,\overline{F}(Z,R)}, \qquad (11)$$

где $\overline{F}(Z,R) = \left(R_j^2(Z) - R_k^2(Z)\right)/\left(R_p^2(Z) - R_k^2(Z)\right)$ – относительная торцевая площадь, принимающая значения $0 \le \overline{F}(Z,R) \le 1$. Отметим, что функция $x(Z,R)$ – некоторая непрерывная дважды дифференцируемая функция вещественных переменных.

Если функция $x(Z,R)$ имеет вид $x(Z,R) = f(R,\ a_0(Z),\ a_1(Z),\ ...,\ a_l(Z))$, тогда в каждой точке R_j сечения $Z = Z_i$ величины $a_0(Z_i),\ a_1(Z_i),\ ...,\ a_l(Z_i)$, $\frac{\partial a_0(Z_i)}{\partial Z},\ \frac{\partial a_1(Z_i)}{\partial Z},\ ...,\ \frac{\partial a_l(Z_i)}{\partial Z}$ и $\frac{\partial^2 a_0(Z_i)}{\partial Z^2},\ \frac{\partial^2 a_1(Z_i)}{\partial Z^2},\ ...,\ \frac{\partial^2 a_l(Z_i)}{\partial Z^2}$ – вещественные числа. Например, если $l = 0$, то вектор вещественных переменных X функции $\Psi(Z,R)$ имеет только три компоненты: $X = \left\{a_0(Z_i),\ \frac{\partial a_0(Z_i)}{\partial Z},\ \frac{\partial^2 a_0(Z_i)}{\partial Z^2}\right\}$.

При заданном векторе X система уравнений (10) имеет три неизвестные $R_k, \frac{dR_k}{dZ}, \frac{d^2R_k}{dZ^2}$. Особо отметим, что эта система уравнений решается аналитически.

Для сечения $Z = \text{const}$ уравнение (8) – обычное дифференциальное уравнение с граничным условием (9). Его решение – решение задачи Коши $\frac{dP}{dR} = f(R,p)$ на интервале $[R_m(Z), R_k(Z)]$.

При заданном векторе X для определения распределения параметров рабочего тела в сечении $Z = Z_i$ достаточно решить задачу Коши, найти давления в оставшихся $(N-1)$ точках сечения и вычислить в этих точках скорости и другие параметры течения. Однако, выполнение уравнения (1) гарантировано только в той единственной точке, в которой определялось граничное условие (9): в точке $R_1 = R_m(Z)$. Во всех других точках R_j, $j = \overline{2,N}$ выполнение уравнения сохранения энергии (1) зависит от правильности выбора вектора X. А правильность выбора вектора X мы сможем оценить из уравнения (1), а именно: определить в каждой точке R_j массовый расход, который следует ожидать через сечение $Z = Z_i$:

$$m_{Xj} = \sqrt{\frac{\frac{2k}{k-1}\left(p_j^* v_j^* - p_j v_j\right)}{\left(\frac{v_j}{2\pi R_j}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right)_j^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\right)_j^2\right] + \left(C_U^2\right)_j}}. \tag{12}$$

Таким образом, необходимо найти такой вектор X, чтобы величины давлений p_j, полученные в результате решения уравнения (8), обращали уравнение (1) в тождество во всех точках R_j, $j = \overline{2,N}$ сечения $Z = Z_i$. Поэтому задача расчета течения в сечении $Z = \text{const}$ может быть сформулирована как задача нелинейного программирования, независимыми переменными которой выступают компоненты вектора X. При построении целевой функции будем руководствоваться необходимостью выполнения условия (12) в каждой точке R_j, $j = \overline{2,N}$.

Алгоритм вычисления целевой функции:

1) Задаемся компонентами вектора X и вычисляем функцию (11) и все ее производные до второго порядка включительно в каждой точке сечения R_j, $j=\overline{1,N}$;

2) аналитически находим корни системы уравнений (10), а именно: R_k, $\frac{dR_k}{dZ}$, $\frac{d^2R_k}{dZ^2}$;

3) решаем задачу Коши $\frac{dp}{dR}=f(R,p)$ на интервале $[R_m(Z), R_k(Z)]$ расчетного сечения $Z=Z_i$ при граничном условии в точке $R_1=R_m(Z)$ и вычисляем ожидаемые массовые расходы $m_{X\,j}$ в точках R_j, $j=2, 3, \ldots, N$, используя условие (12);

4) вычисляем целевую функцию, построенную по принципу критерия метода наименьших квадратов

$$S(X)=\frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{m_{X\,j}-m_1}{m_1}\right)^2 .$$

Итак, предложен новый метод, который в рамках осесимметричной модели течения при заданных аэродинамических граничных условиях – характеристиках ядра потока – находит геометрию канала, что качественно отличает его от существующих в настоящее время методов решение обратной задачи как итерационного решения прямых задач. Новый метод позволяет существенно распараллелить вычислительные процессы и учитывает особенности решения задачи оптимального проектирования канала:

– обратная задача разделена на две независимые друг от друга подзадачу определения геометрии внутренней границы канала и подзадачу определения наружной границы канала;

– каждая из подзадач разделена на независимые частные задачи, которые могут решаться в любой последовательности, группами или одновременно;

– частная задача сформулирована как задача нелинейного программирования и при ее решении исключены несходящиеся итерационные процессы и не требуется хранения данных о предыстории поиска.

Список литературы: **1.** *Субботович В.П.* Определение параметров осесимметричного потока в торцевом сечении кольцевого канала / В.П. Субботович, С.А. Темченко // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 52-55.

Поступило в редколлегию 15.02.10