УДК 621.165

Г.А. ГАПОН, н.с. НТУ «ХПИ»

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ НА ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ С ПЕРЕМЕННЫМ РАСХОДОМ

На базе законов динамики сплошной среды переменной массы рассматривается течение сжимаемой жидкости в каналах переменного сечения с переменным расходом, вызванным отводом части рабочего тела вдоль течения. Получены аналитические связи между изменениями газодинамических параметров течения и условиями отвода газа. Проведен анализ влияния числа Маха, профиля канала и условий отвода на распределение параметров вдоль течения. Показано влияние условий отвода рабочего тела на значения критических параметров.

На основі законів динаміки суцільного середовища змінної маси розглядається течія стисливої рідини в каналах зі змінним поперечним перерізом та змінною витратою, викликаною відведенням частини робочого тіла вздовж течії. Здобуті аналітичні зв’язки між змінами газодинамічних параметрів течії та умовами відведення газу. Проведено аналіз впливу числа Маха, профілю каналу та умов відводу на розподіл параметрів вздовж течії. Показаний вплив умов відведення робочого тіла на значення критичних параметрів.

On the base of dynamics laws of continuum of variable mass the compressible fluid stream in the channel with variable cross-section and variable flow volume is considered. The variable flow volume in the channel is caused by bleed-off the path of the working medium along the current. The analytic dependencies of the changes of gas-dynamic parameters on the withdrawal conditions are obtained. The analysis of impact of Mach number, the channel profile and withdrawal conditions on the parameters distribution along the flow is performed. The withdrawal conditions influence on critical parameters values is shown.

Широкое распространение в технике имеют течения с переменным расходом, связанные с отводом (подводом) рабочей среды вдоль потока. Они имеют место и в турбоагрегатах (в межвенцовом зазоре околоотборных ступеней, в камерах отборов на регенерацию или теплофикацию паровых турбин, во входных, переходных и выходных патрубках паровых и газовых турбин и др.). От организации разделения (смешения) потоков в узлах турбоагрегатов и другого оборудования, где оно имеет место, зависит эффективность их работы. Для ее повышения требуется знать закономерности влияния условий подвода (отвода) рабочего тела на параметры течения.

С целью выяснения общих закономерностей зависимости параметров течения в канале от условий присоединения (отсоединения) масс рабочего тела в статье рассматриваются осредненные по поперечному сечению параметры рабочей среды. В связи с тем, что отсоединение (присоединение) масс рабочего тела происходит непрерывно вдоль потока на некотором участке канала, на этом участке имеет место течение с переменным расходом вдоль пути и для его изучения целесообразно использовать законы динамики сплошной среды переменной массы. Данная тема рассматривалась автором в работах [1–3], где течение рабочей среды можно было считать несжимаемым.

В статье предлагается одномерная математическая модель течения сжимаемого газа в канале с переменной вдоль пути площадью сечения и переменным массовым расходом, вызванным отводом масс газа вдоль канала.

Ось канала обозначим через x (ось может быть и криволинейной) и направим вдоль потока. На участке канала длиной l от сечения *1* до сечения *2* происходит отвод рабочей среды.

Для математического описания указанного течения в канале воспользуемся системой уравнений динамики сплошной среды переменной массы [4], которая для идеальной баротропной жидкости при отсутствии массовых сил имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = J\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{J}{\rho}(\boldsymbol{V}_0 - \boldsymbol{V})\,; \tag{2}$$

$$\rho = f(p)\,, \tag{3}$$

где ρ – плотность, p – давление, $\boldsymbol{V}$ – вектор скорости потока, $\boldsymbol{V}_0$ – вектор скорости, с которой жидкость подводится (отводится), J – секундное изменение массы вещества в данной точке потока, отнесенное к единице его объёма.

При одномерной трактовке течения сжимаемой жидкости в канале с переменными площадью поперечного сечения $S(x)$ и массовым расходом $G(x)$ имеем

$$G(x) = \rho V_x \cdot S\,. \tag{4}$$

Вектор скорости потока направлен по касательной к оси x, его проекция на ось $V_x > 0$.

Из закона сохранения масс (1) вытекает

$$d(\rho V_x \cdot S) = J \cdot S dx\,. \tag{5}$$

Уравнение (2) в проекции на ось x имеет вид

$$V_x \cdot \frac{dV_x}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{J}{\rho}(V_{0x} - V_x)\,. \tag{6}$$

Умножим уравнение (6) на dx и исключим из него давление p, воспользовавшись определением скорости звука $a = \sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}$, из которого следует $dp = a^2 d\rho$. Получим

$$V_x \cdot dV_x = -a^2\frac{d\rho}{\rho} + \frac{J}{\rho}(V_{0x} - V_x)dx\,. \tag{7}$$

Исключим из уравнения (7) плотность ρ, для чего выразим $\dfrac{d\rho}{\rho}$ из уравнения (5)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV_x}{V_x} - \frac{dS}{S} + \frac{J}{\rho V_x}dx \tag{8}$$

и подставим в (7). Получим

$$(V_x^2 - a^2)\cdot\frac{dV_x}{V_x} = a^2 \cdot \frac{dS}{S} + \frac{J}{\rho V_x}\cdot\left(V_x(V_{0x} - V_x) - a^2\right)\cdot dx\,. \tag{9}$$

Разность векторов $(\boldsymbol{V}_0 - \boldsymbol{V})$ есть вектор скорости отвода рабочей среды относительно скорости потока, поэтому обозначим ее через $\boldsymbol{V}_{\text{отн}}$, ее проекцию на ось x – через $V_{\text{отн}\,x}$.

Разделим обе части уравнения (9) на a^2 и введем в рассмотрение число Маха $\mathrm{M} = \dfrac{V_x}{a}$.

Тогда уравнение (9) примет вид

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\cdot\frac{dV_x}{V_x} = \frac{dS}{S} + \frac{J}{\rho V_x}\left(\mathrm{M}\cdot\frac{V_{\text{отн}\,x}}{a} - 1\right)dx\,. \tag{10}$$

При отсутствии отвода рабочего тела из канала ($J = 0$, $G = \text{const}$) формула (10) дает известный результат [4]:

$$(\mathrm{M}^2-1)\frac{dV_x}{V_x}=\frac{dS}{S}. \qquad (11)$$

Проанализируем уравнение (10) при наличии отвода рабочего тела из канала. Первое слагаемое правой части (10) определяется геометрией канала, второе слагаемое учитывает условия, при которых жидкость отводится. С целью упрощения дальнейших записей введем обозначение для второго слагаемого правой части уравнения (10):

$$\frac{J}{\rho V_x}\left(\mathrm{M}\cdot\frac{V_{\text{отн}\,x}}{a}-1\right)=D. \qquad (12)$$

С новым обозначением уравнение (10) будет иметь вид

$$(\mathrm{M}^2-1)\cdot\frac{dV_x}{V_x}=\frac{dS}{S}+D\cdot dx. \qquad (13)$$

Исходя из (12), оценим знак выражения $D{\cdot}dx$ – второго слагаемого правой части уравнения (13). Поскольку ось x направлена вдоль потока и dx отсчитывается по потоку, то $dx > 0$; а величина $J<0$ при отводе жидкости из канала, то

$$\begin{cases} 1)\ \text{при}\ V_{\text{отн}\,x}>\dfrac{a}{\mathrm{M}}\ \text{имеем}\ D\cdot dx<0; \\ 2)\ \text{при}\ V_{\text{отн}\,x}=\dfrac{a}{\mathrm{M}}\ \text{имеем}\ D\cdot dx=0; \\ 3)\ \text{при}\ V_{\text{отн}\,x}<\dfrac{a}{\mathrm{M}}\ \text{имеем}\ D\cdot dx>0. \end{cases} \qquad (14)$$

Следовательно, второе слагаемое $D{\cdot}dx$ правой части (13) может усиливать действие первого слагаемого, если они имеют один знак, ослаблять или менять направленность, если у них разные знаки, или не влиять, если оно равно 0.

1 Дозвуковое течение (М<1)

Из (13) следует, что знак dV_x противоположен знаку правой части (13).

1.1 Суживающийся канал (*dS* < 0)

Первое слагаемое правой части уравнения (13) $\frac{dS}{S}<0$. Знак второго слагаемого определяется условиями (14).

1) При $V_{\text{отн}\,x}>\frac{a}{\mathrm{M}}$ имеем $D{\cdot}dx < 0$, $\left(\frac{dS}{S}+D\cdot dx\right)<0$. Следовательно, $dV_x>0$, а $\frac{dV_x}{V_x}=\left(\frac{dS}{S}+D\cdot dx\right)\cdot\frac{1}{(M^2-1)}$. Поток ускоряется, причем ускорение при наличии отвода больше, чем при течении без него (при $J = 0$, т.е. и $D = 0$).

2) При $V_{\text{отн}\,x}=\frac{a}{\mathrm{M}}$ имеем $D{\cdot}dx = 0$. Правая часть (10) равна $\frac{dS}{S}$. Следовательно, $dV_x>0$, а $\frac{dV_x}{V_x}=\frac{dS}{S}\cdot\frac{1}{(M^2-1)}$. Поток ускоряется, как при течении без отвода.

3) При $V_{\text{отн}\,x}<\frac{a}{\mathrm{M}}$ имеем $D{\cdot}dx > 0$, а $\frac{dS}{S}<0$. Слагаемые правой части (10) имеют разные знаки.

Если $\left|\frac{dS}{S}\right| > D \cdot dx$, то $dV_x > 0$, поток ускоряется, но ускорение меньше, чем при $J = 0$.

Если $\left|\frac{dS}{S}\right| = D \cdot dx$, то $dV_x = 0$, ускорение равно нулю.

Если $\left|\frac{dS}{S}\right| < D \cdot dx$, то $dV_x < 0$, течение замедляется.

1.2 Расширяющийся канал ($dS > 0$)

Аналогично предыдущему, согласно (14) могут иметь место три случая.

1) $V_{\text{отн}\,x} < \frac{a}{\mathrm{M}}$. Отсюда $D{\cdot}dx > 0$. Оба слагаемых правой части (13) положительны, значит, $dV_x < 0$. Поток замедляется и притом сильнее, чем при течении без отвода.

2) $V_{\text{отн}\,x} = \frac{a}{\mathrm{M}}$, следовательно, $D{\cdot}dx = 0$ и $dV_x < 0$. Поток замедляется, как при безотборном течении.

3) $V_{\text{отн}\,x} > \frac{a}{\mathrm{M}}$. Получаем $D{\cdot}dx < 0$. Слагаемые правой части (13) имеют разные знаки.

Если $\frac{dS}{S} > |D \cdot dx|$, то $dV_x < 0$, поток замедляется, но слабее, чем при течении без отбора.

Если $\frac{dS}{S} = |D \cdot dx|$, то $dV_x = 0$. Ускорение равно нулю.

Если $\frac{dS}{S} < |D \cdot dx|$, то $dV_x > 0$, поток ускоряется.

2 Сверхзвуковое течение (M>1)

Из (13) следует, что знак dV_x совпадает со знаком правой части (13).

2.1 Суживающийся канал ($dS < 0$)

1) Аналогично предыдущим рассуждениям, можно сразу сказать, что если оба слагаемых правой части (13) отрицательны, то $dV_x < 0$, поток замедляется и притом модуль ускорения больше, чем при течении без отбора. Этот результат имеет место при $D{\cdot}dx < 0$, т.е. при $V_{\text{отн}\,x} > \frac{a}{\mathrm{M}}$.

2) Если величина $D{\cdot}dx = 0$, то $dV_x < 0$ и поток также замедляется, но слабее, чем при наличии отвода, – замедляется так, как при отсутствии отвода. Этот результат получаем при условии $V_{\text{отн}\,x} = \frac{a}{\mathrm{M}}$.

3) И, наконец, случай, когда оба слагаемых правой части (13) имеют разные знаки, возникает при $D{\cdot}dx > 0$, т.е. при условии $V_{\text{отн}\,x} < \frac{a}{\mathrm{M}}$. Если $\left|\frac{dS}{S}\right| > D \cdot dx$, то $dV_x < 0$, поток замедляется, но модуль ускорения меньше, чем при $J = 0$. Если $\left|\frac{dS}{S}\right| = D \cdot dx$, то $dV_x = 0$, ускорение равно нулю. Если $\left|\frac{dS}{S}\right| < D \cdot dx$, то $dV_x > 0$, течение ускоряется.

2.2 Расширяющийся канал ($dS > 0$)

1) Если оба слагаемых правой части уравнения (13) будут иметь одинаковые знаки, т.е. если будет выполняться неравенство $D \cdot dx > 0$, то получим $dV_x > 0$. Поток будет ускоряться, причем его ускорение будет больше, чем при течении без отвода. Этот случай имеет место при условии $V_{\text{отн}\,x} < \dfrac{a}{\text{M}}$.

2) Если $D \cdot dx = 0$, получим также $dV_x > 0$. Поток будет ускоряться, но с ускорением меньшим, чем в предыдущем случае, но таким, как при течении без отвода. Этот случай имеет место при условии $V_{\text{отн}\,x} = \dfrac{a}{\text{M}}$.

3) Если слагаемые правой части уравнения (13) будут иметь разные знаки, т.е. будет выполняться неравенство c, которое соблюдается при $V_{\text{отн}\,x} > \dfrac{a}{\text{M}}$, то результат зависит от соотношения модулей слагаемых. При $\dfrac{dS}{S} > |D \cdot dx|$ получим $dV_x > 0$. Поток ускоряется, но слабее, чем при течении без отбора. При $\dfrac{dS}{S} = |D \cdot dx|$ получим $dV_x = 0$. Ускорение равно нулю. При $\dfrac{dS}{S} < |D \cdot dx|$ получим $dV_x < 0$. Поток замедляется.

3 Течение со скоростью звука (М = 1)

Если в каком-либо сечении канала на участке с отводом рабочей среды скорость течения достигает скорости звука, $V_x = a = a^*$, где a^* – критическая скорость звука, то в данной точке правая часть уравнения (10) обращается в нуль, т.е. выполняется равенство

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dx} = -\frac{J}{\rho a^*}\left(\frac{V_{\text{отн}\,x}}{a^*} - 1\right). \tag{15}$$

В частном случае, при $J = 0$, когда отвод в канале отсутствует, из (15) следует, что критическая скорость возникает в сечении, где функция $S(x)$ имеет минимум. При $J \neq 0$ критическая скорость может возникнуть в сечении, где функция $S(x)$ имеет минимум, возрастает или убывает, в зависимости от параметров течения и отвода рабочей среды: 1) при $\dfrac{dS}{dx} = 0$ и $V_{\text{отн}\,x} = a^*$; 2) при $\dfrac{dS}{dx} < 0$ и $V_{\text{отн}\,x} < a^*$; 3) при $\dfrac{dS}{dx} > 0$ и $V_{\text{отн}\,x} > a^*$ и в соответствии с (15).

4 Критические параметры адиабатического течения идеального газа в канале с отводом рабочей среды

Рассматриваем канал, имеющий отвод на участке от начального сечения *1* до конечного сечения *2*. Даны: закон изменения площади поперечного сечения вдоль канала $S(x)$, массовый расход $G(x)$ и параметры в сечении *1* (отмечены индексом 1), интенсивность отвода рабочей среды из канала $J(x)$, вектор скорости $\boldsymbol{V}_0$, с которой жидкость отводится из канала.

Интегрируя (5) от начального до произвольного сечения x вдоль участка *1–2*, имеем

$$\rho V_x S = \rho_1 V_{x1} S_1 + \int_{x_1}^{x} J \cdot S dx\,. \tag{16}$$

Упростим уравнение (6). Введем V_x под знак дифференциала и исключим давление p и плотность ρ, используя соотношение $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=\frac{di}{dx}$, где i – энтальпия. Получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{V_x^2}{2}+i\right)=\frac{J}{\rho}(V_{0x}-V_x)\,. \tag{17}$$

Проинтегрируем (17) в пределах по x от сечения 1-го (x_1) до произвольного x в пределах участка *1–2*, где жидкость отводится. Получим

$$\frac{V_x^2}{2}+i=\frac{V_{x_1}^2}{2}+i_1+\int_{x_1}^{x}\frac{J}{\rho}(V_{0x}-V_x)dx\,. \tag{18}$$

Обозначим индексом 0 параметры потока, заторможенного адиабатически и изэнтропически. Тогда выражение

$$\frac{V_{x_1}^2}{2}+i_1=i_0\,,$$

с учетом которого уравнение (18) перепишется в виде

$$\frac{V_x^2}{2}+i=i_0+\int_{x_1}^{x}\frac{J}{\rho}(V_{0x}-V_x)dx\,. \tag{19}$$

В уравнении (19) обозначим второе слагаемое правой части через $A(x)$:

$$\int_{x_1}^{x}\frac{J}{\rho}(V_{0x}-V_x)dx=A(x),$$

тогда с новым обозначением уравнение (19) примет вид

$$\frac{V_x^2}{2}+i=i_0+A(x)\,. \tag{20}$$

В уравнении (20) представим энтальпию в виде $i=c_pT$ и разделим обе его части на c_pT. Получим

$$\frac{V_x^2}{2c_pT}+1=\frac{T_0}{T}+\frac{A(x)}{c_pT}\,. \tag{21}$$

С учетом того, что первое слагаемое левой части уравнения (21) $\frac{V_x^2}{2c_pT}=\frac{k-1}{2}\cdot\mathrm{M}^2$, разрешим уравнение (21) относительно $\frac{T}{T_0}$:

$$\frac{T}{T_0}=\left(1+\frac{A(x)}{c_pT_0}\right)\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right). \tag{22}$$

Скорость звука выражается через температуру $\frac{a}{a_0}=\sqrt{\frac{T}{T_0}}$, и из (22) следует

$$\frac{a}{a_0}=\sqrt{\left(1+\frac{A(x)}{c_pT_0}\right)\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)}. \tag{23}$$

Остальные параметры легко получить с учетом уравнения адиабаты

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \tag{24}$$

и уравнения состояния Менделеева-Клапейрона

$$\frac{p}{\rho} = RT\,; \tag{25}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\left(1 + \frac{A(x)}{c_p T_0}\right) \Big/ \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)\right)^{\frac{1}{k-1}}; \tag{26}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\left(1 + \frac{A(x)}{c_p T_0}\right) \Big/ \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{27}$$

Полагая М = 1 в (22), (23), (26), (27), получим формулы для критических параметров:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{A(x)}{c_p T_0}\right); \tag{28}$$

$$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{A(x)}{c_p T_0}\right)}; \tag{29}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{k+1}{2} \Big/ \left(1 + \frac{A(x)}{c_p T_0}\right)\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{30}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{A(x)}{c_p T_0}\right)\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{31}$$

Таким образом, на течение сжимаемой жидкости в канале с отводом рабочей среды существенное влияние оказывают не только число Маха М и изменение площади поперечного сечения вдоль канала, но и условия отвода: интенсивность (J), относительная скорость отвода жидкости вдоль пути, местная скорость звука, которые определяют характер взаимодействия транзитного и отводимого потоков.

Список литературы: **1.** *Гапон, Г.А.* Динамика переменной массы в каналах сложной формы [Текст] / Г.А. Гапон // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – № 5. – С. 144-149. **2.** *Гапон, Г.А.* Динамика переменной массы вихревых течений [Текст] / Г.А. Гапон // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – № 3. – С. 193-195. – ISSN 2078-774Х. **3.** *Гапон, Г.А.* Разделение потока в спиральной камере центробежной турбомашины [Текст] / Г.А. Гапон // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2011. – № 6. – С. 69-76. – ISSN 2078-774Х. **4**. *Лойцянский, Л.Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

Поступила в редколлегию 23.02.12