

УДК 563.2: 539.3

*Ю.А. МАЛАЯ*, ассистент НМетАУ, Днепропетровск

*А.И. ГУБИН*, канд. техн. наук; доц. ДНУ им. О. Гончара, Днепропетровск

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО НАГРЕВА  
ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Разработаны нелинейные математические модели лазерного нагрева тел с покрытиями на основе гиперболического уравнения теплопроводности, в которых поглощение энергии лазерного излучения в зависимости от параметров импульса описывается объемным или поверхностным источником тепла. Приближенным аналитическим методом решения нелинейных краевых задач для систем гиперболических уравнений теплопроводности рассчитаны температурные поля и сравнены с температурными полями, полученными на основе соответствующих линейных моделей.

Розроблені нелінійні математичні моделі лазерного нагріву тіл з покриттями на основі гіперболічного рівняння теплопровідності, в яких поглинання енергії лазерного випромінювання в залежності від параметрів імпульсу описується об'ємним або поверхневим джерелом тепла. Наближеним аналітичним методом розв'язку нелінійних крайових задач для систем гіперболічних рівнянь теплопровідності обчислені температурні поля та порівняні з температурними полями, що отримані на основі відповідних лінійних моделей.

The nonlinear mathematical model of laser heating of bodies with coatings has been developed on the basis of the hyperbolic heat conduction equation in which the absorption of laser energy, depending on the parameters of the pulse is described by the volume or surface source of heat. Calculated temperature fields by approximate analytical method for solving nonlinear boundary problems for hyperbolic systems of equations of thermal conductivity, and temperature fields are compared with those obtained on the basis of the corresponding linear models.

В настоящее время развитие промышленности требует повышения надежности и долговечности выпускаемых изделий. Как известно, эффективность, долговечность и надежность деталей и узлов систем и механизмов в значительной степени определяются их поверхностными свойствами. Учитывая это, разработка методов модифицирования поверхностных слоев материалов и изделий является актуальной задачей для развития новых современных технологий. Широкое применение различных методов нанесения защитных покрытий на металлические поверхности открыло новые возможности придания применяемым металлам и сплавам высоких, недостижимых ранее свойств, что обеспечивает возможность решения задач экономии металлов, восстановления изношенных поверхностей, продления срока службы изделий [1–4].

Среди методов последующей обработки покрытий после нанесения основное место занимают методы обработки поверхности концентрированными потоками энергии, которые позволяют модифицировать поверхностные слои для достижения более высоких физико-механических свойств, стойкости против окисления и коррозии. Наиболее распространенным методом обработки материалов концентрированными потоками энергии является обработка лазерным излучением.

Интенсификация процессов нагрева тел, а также широкий диапазон изменения температур приводит к необходимости учета конечной скорости распространения тепла и зависимости теплофизических и оптических характеристик от температуры [4–6]. Следовательно, математическое моделирование процессов нагрева тел с покрытиями при лазерном воздействии на основе обобщенного закона теплопроводности и с учетом температурной зависимости теплофизических, оптических характеристик, и также

разработка приближенных аналитических методов решения нелинейных краевых задач для систем гиперболических уравнений теплопроводности являются актуальными.

Целью работы является построение нелинейных математических моделей нагрева тел с покрытиями лазерным излучением на основе гиперболического уравнения теплопроводности, в которых поглощение энергии лазерного излучения в зависимости от параметров импульса описывается объемным или поверхностным источником тепла, а также сравнение температурных полей, полученных на основе этих моделей с температурными полями, полученными на основе соответствующих линейных моделей.

Энергия лазерного излучения поглощается в тонком поверхностном слое согласно закону Бугера [4]. В случае, когда толщина прогреваемого слоя значительно больше толщины слоя, в котором поглощается энергия лазерного излучения, поглощение энергии моделируется поверхностным источником тепла. Если же, толщина прогреваемого слоя соизмерима с толщиной слоя, в котором поглощается энергия лазерного излучения, то поглощение энергии лазерного излучения моделируется объемным источником тепла. Толщина прогреваемого слоя определяется параметрами импульса и теплофизическими характеристиками обрабатываемого материала.

Рассмотрим задачу о лазерном нагреве тела с покрытием. Предположим, что радиус пятна нагрева намного больше глубины проникновения тепла, поэтому задача может быть рассмотрена в одномерном приближении. Теплофизические характеристики материалов покрытия и основы являются заданными функциями температуры. Времена релаксации тепловых потоков примем постоянными. В начальный момент времени температура в системе является постоянной и равна  $T_0$ , а скорость изменения температуры равна нулю. Плотность потока энергии лазерного излучения является заданной функцией времени. На внешних границах заданы граничные условия второго рода. Тепловой контакт на стыке слоев считается идеальным. Тогда в случае, если рассматривается поверхностное поглощение, математическая модель процесса теплопроводности в обрабатываемом лазерным излучением двухслойном материале включает в себя нелинейные однородные дифференциальные уравнения теплопроводности

$$\tau_{r,1} \frac{\partial}{\partial t} \left( c_1(T_1) \rho_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} \right) + c_1(T_1) \rho_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right), \quad S_0 < x < S_1, \quad (1)$$

$$\tau_{r,2} \frac{\partial}{\partial t} \left( c_2(T_2) \rho_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} \right) + c_2(T_2) \rho_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right), \quad S_1 < x < S_2, \quad (2)$$

$$0 < t \leq t_k,$$

которые дополняются начальными условиями:

$$T_v(x,0) = T_0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$S_{v-1} \leq x \leq S_v, \quad v = 1, 2,$$

граничными условиями:

$$-\lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_1} = \left( A_1(T_1)q_0(t) + \tau_{r,1} \frac{\partial(A(T_1)q_0(t))}{\partial t} \right) \Big|_{x=S_1}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_2} = 0, \quad 0 < t \leq t_k, \quad (6)$$

и граничными условиями на стыке слоев:

$$T_2(S_1, t) = T_1(S_1, t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_1} + \tau_{r,2} \frac{d}{dt} \left( \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=S_1} = \\ & = \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_1} + \tau_{r,1} \frac{d}{dt} \left( \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=S_1}, \quad 0 < t \leq t_k. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае, когда рассматривается объемное поглощение, математическая модель процесса теплопроводности в обрабатываемом лазерным излучением двухслойном материале состоит из нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \tau_{r,1} \frac{\partial}{\partial t} \left( c_1(T_1) \rho_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} \right) + c_1(T_1) \rho_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right) + \\ & + A_1(T_1)q_0(t)\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + \tau_{r,1} \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} \frac{\partial(A_1(T_1)q_0(t))}{\partial t}, \quad S_0 < x < S_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \tau_{r,2} \frac{\partial}{\partial t} \left( c_2(T_2) \rho_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} \right) + c_2(T_2) \rho_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right), \quad S_1 < x < S_2, \quad (10) \\ & 0 < t \leq t_k, \end{aligned}$$

начальных условий:

$$T_v(x,0) = T_0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad (12)$$

$$S_{v-1} \leq x \leq S_v, \quad v = 1, 2,$$

граничных условий:

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_1} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_2} = 0, \quad 0 < t \leq t_k, \quad (14)$$

и граничных условий на стыке слоев:

$$T_2(S_1, t) = T_1(S_1, t), \quad (15)$$

$$\lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_1} + \tau_{r,2} \frac{d}{dt} \left( \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=S_1} =$$

$$= \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_1} + \tau_{r,1} \frac{d}{dt} \left( \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=S_1}, \quad 0 < t \leq t_k, \quad (16)$$

где  $T_v(x,t)$  – поля температур;  $\lambda_v(T_v)$  – коэффициенты теплопроводности;  $c_v(T_v)$  – теплоемкости;  $\rho_v(T_v)$  – плотности веществ;  $\tau_{r,v}$  – времена релаксации теплового потока;  $v$  – номер слоя ( $v = 1$  для покрытия,  $v = 2$  для основы);  $t$  – текущее время;  $t_k$  – длительность импульса лазерного излучения;  $x$  – пространственная координата;  $S_v$  – координаты границ слоев ( $S_0 = 0$ );  $A_1(T_1)$  – поглощательная способность материала покрытия;  $\alpha_1$  – коэффициент поглощения материала покрытия;  $q_0(t)$  – плотность потока энергии лазерного излучения.

Для решения задач (1)–(8), (9)–(16) применялся приближенный аналитический метод, сочетающий метод пространственно-временных квадрантов и операционный метод [7].

Согласно этому методу каждый из прямоугольников  $[S_{v-1}, S_v] \times [0, t_k]$  разбивается двумя семействами параллельных прямых  $x = x_i$ ,  $i = \overline{i_{v-1} + 1, i_v - 1}$  и  $t = t_j$ ,  $j = \overline{1, M - 1}$  на прямоугольники  $[x_{i-1}, x_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ , ( $i = \overline{i_{v-1} + 1, i_v}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ). Здесь  $x_{i_v} = S_v$ ,  $i_0 = 0$ ,  $i_v = \sum_{r=1}^v N_r$ ,  $N = i_2$ ,  $v = 1, 2$ ,  $N_v$  – количество слоев на которые разбивается  $v$ -ый слой.

В каждом из полученных прямоугольников соответствующее нелинейное гиперболическое уравнение теплопроводности заменяем линейным уравнением. На внешних границах и на стыке слоев нелинейные условия заменяются линейными на каждом временном промежутке  $[t_{j-1}; t_j]$ . На сторонах прямоугольников, принадлежащих прямым  $x = x_i$  ( $i = \overline{i_{v-1} + 1, i_v - 1}$ ,  $v = 1, 2$ ) также задаются линейные условия идеального теплового контакта, а на сторонах прямоугольников, принадлежащих прямым  $t = t_j$  ( $j = \overline{1, M - 1}$ ), выполняются условия равенства температур и производных от температуры по времени.

Таким образом, на каждом промежутке по времени  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  получаем линейную задачу теплопроводности для многослойной пластины, причем эти задачи необходимо решать последовательно от 1-го до  $M$ -го промежутка. Аналитические решения таких задач получены операционным методом в работах [2, 8, 9].

На основе предложенного метода были проведены расчеты полей температур при лазерном нагреве тела с покрытием. В качестве материала покрытия был взят молибден, температурные зависимости свойств которого имеют вид [4]:

$$\lambda(T) = 173,8 - 9,20 \cdot 10^{-2} \cdot T + 4,29 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 7,59 \cdot 10^{-9} \cdot T^3, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$c(T) = 216,7 + 0,103 \cdot T - 6,8 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 2,01 \cdot 10^{-8} \cdot T^3, \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$\rho(T) = 1,02 \cdot 10^4 - 3,8 \cdot 10^{-2} \cdot T, \text{ кг/м}^3;$$

$$A(T) = 0,99 \cdot 10^{-4} \cdot T.$$

В качестве материала основы была взята сталь 40X, температурные зависимости свойств которой имеют вид [4]:

$$\lambda(T) = 40,62 + 0,013 \cdot T - 4,847 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 2,405 \cdot 10^{-8} \cdot T^3, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$c(T) = 364,726 + 0,407 \cdot T - 1,048 \cdot 10^{-4} \cdot T^2, \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$\rho(T) = 7,918 \cdot 10^4 - 0,32 \cdot T, \text{ кг/м}^3.$$

Начальная температура системы принималась равной 300 К. Плотность потока энергии лазерного излучения задавалась функцией времени  $q_0(t) = q_{\max} \sin \frac{\pi t}{t_k}$ .

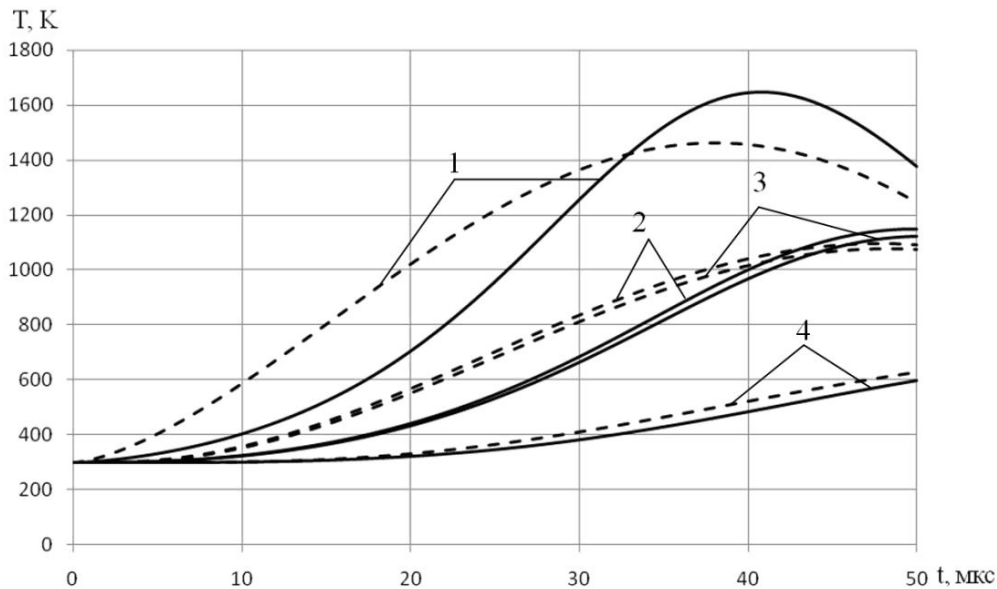


Рис. 1. Изменение температуры во времени:  
1 – при  $x = 0$ ; 2 – при  $x = 0,025$  мм; 3 – при  $x = 0,0255$  мм; 4 – при  $x = 0,04$  мм

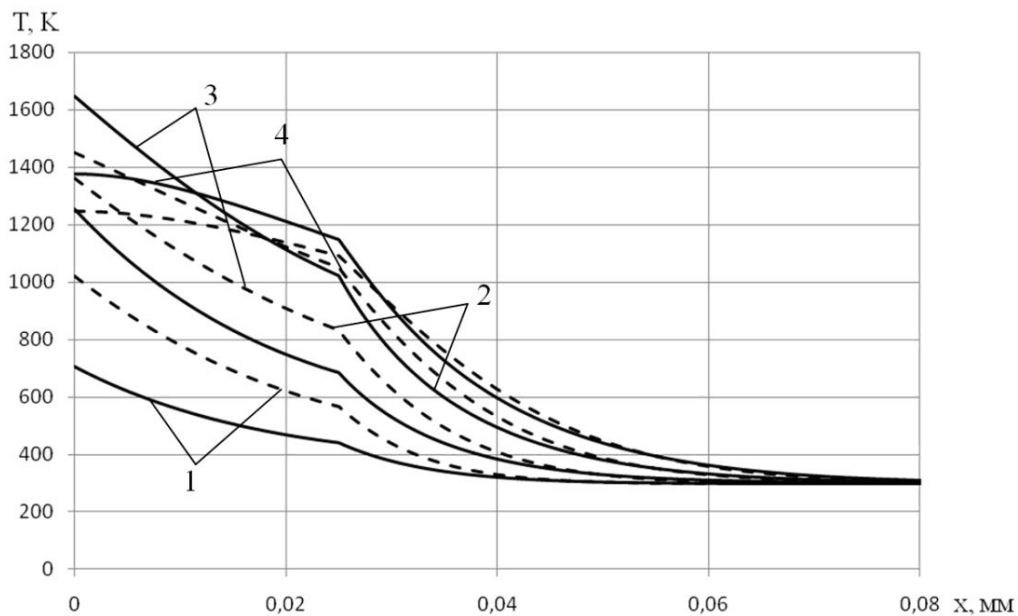


Рис. 2. Распределение температуры в системе:  
1 – при  $t = 20$  мкс; 2 – при  $t = 30$  мкс; 3 – при  $t = 40,8$  мкс; 4 – при  $t = 50$  мкс

Первый расчет был проведен при  $q_{\max} = 3,7 \cdot 10^{10}$  Вт/м<sup>2</sup> на основе метаматематической модели (1)–(8), так как при такой величине максимальной

плотности потока энергии толщина прогретого слоя значительно больше толщины слоя, в котором поглощается излучение.

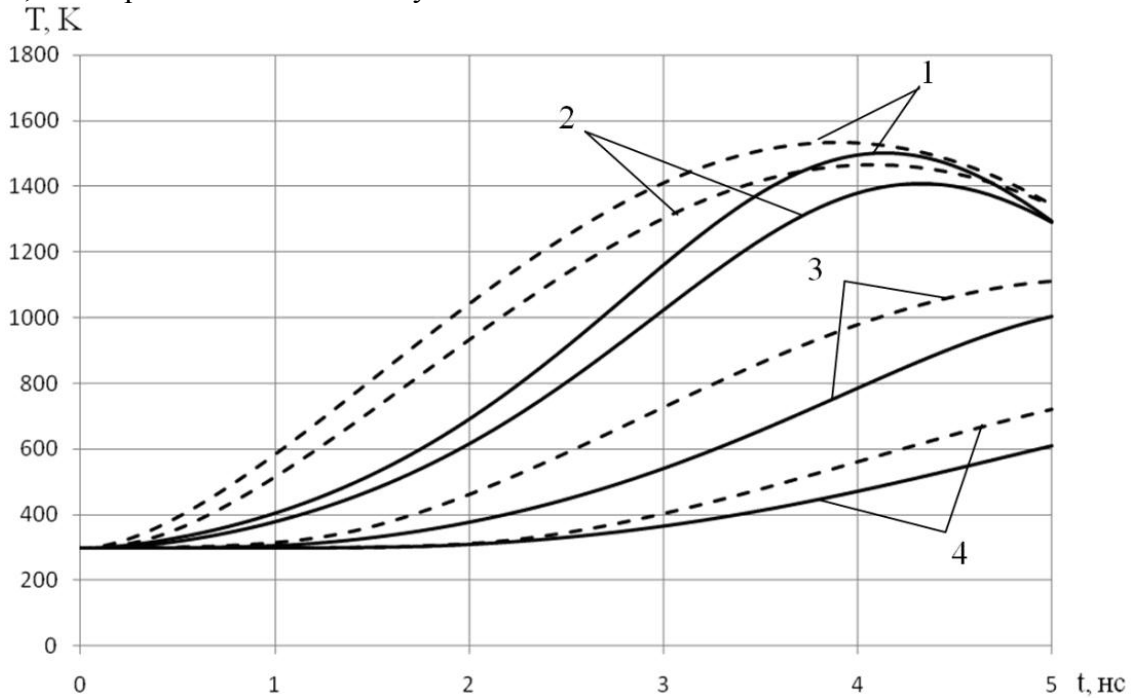


Рис. 3. Изменение температуры во времени:  
1 – при  $x = 0$ ; 2 – при  $x = 0,1$  мкм; 3 – при  $x = 0,4$  мкм; 4 – при  $x = 0,5$  мкм

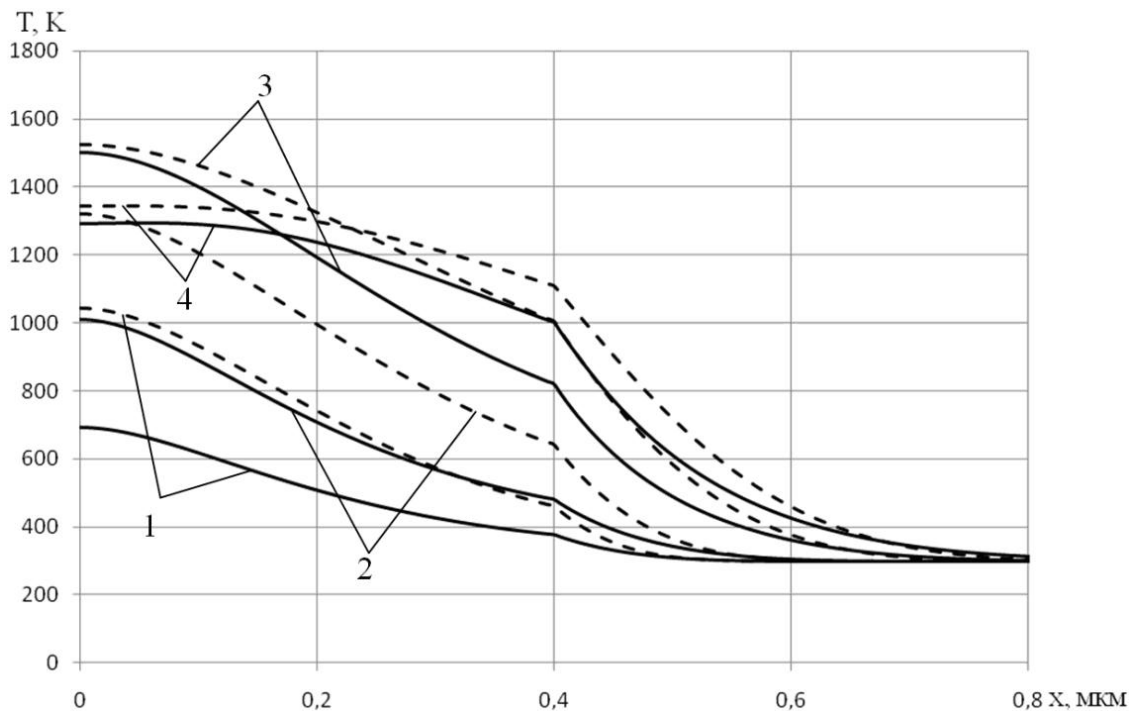


Рис. 4. Распределение температуры в системе:  
1 – при  $t = 4,14$  нс; 2 – при  $t = 5$  нс; 3 – при  $t = 2$  нс; 4 – при  $t = 2,7$  нс

Толщина покрытия принималась  $S_1 = 0,025$  мм, общая толщина системы выбиралась  $S_2 = 0,1$  мм. Длительность импульса лазерного излучения  $t_k = 50$  мкс. Результаты этого расчета приведены на рис. 1 и рис. 2.

Второй расчет проводился при  $q_{\max} = 0,5 \cdot 10^{13}$  Вт/м<sup>2</sup> на основе метаматематической модели (9)–(16), так как при такой величине максимальной плотности потока энергии лазерного излучения толщина прогретого слоя сравнима по порядку с толщиной слоя, в котором поглощается энергия лазерного излучения.

Толщина покрытия для этого расчета принималась  $S_1 = 0,4$  мкм, общая толщина системы выбиралась  $S_2 = 0,8$  мкм. Длительность импульса лазерного излучения  $t_k = 5$  нс. Результаты расчета представлены на рис. 3 и рис. 4.

На рис. 1–4 сплошные линии соответствуют решениям нелинейных задач, а штриховые линии – решениям соответствующих линейных задач. Решения линейных задач были получены при среднеинтегральных значениях теплофизических и оптических характеристик, которые для молибдена и стали задавались следующие:

молибден:  $\bar{\lambda} = 121$  Вт/(м·К);  $\bar{c\rho} = 2,744 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К);  $\bar{A} = 0,098$ ;

Ст. 40X:  $\bar{\lambda} = 33,8$  Вт/(м·К);  $\bar{c\rho} = 4,605 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К).

Существенное различие температурных полей, полученных в работе на основе предложенных нелинейных математических моделей лазерного нагрева тел с покрытиями и соответствующих линейных моделей (рис. 1–4) указывает на необходимость учета зависимости теплофизических и оптических характеристик материалов от температуры.

Построенные нелинейные математические модели лазерного нагрева тел с покрытиями на основе гиперболического уравнения теплопроводности дают возможность повысить точность расчета температурных полей при выборе режимов обработки тел концентрированными потоками энергии.

**Список литературы:** 1. Черненко, В.С. Променеві методи обробки [Текст]: навч. посібник / В.С. Черненко, М.В. Кіндрачук, О.І. Дудка. – К.: Кондор, 2008. – 166 с. 2. Мала, Ю.А. Математичне моделювання теплових процесів поверхневого зміцнення двошарових елементів конструкцій [Текст] / Ю.А. Мала // Системні технології. – Т. 2(67). – Дніпропетровськ, 2010. – С. 60-66. 3. Мала, Ю.А. Поверхнєве зміцнення металів висококонцентрованими потоками енергії [Текст] / Ю.А. Мала // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – Вип. 3(25), Т. 2. – ПолтНТУ, 2009. – С. 131-136. 4. Рыкалин, Н.Н. Лазерная обработка материалов [Текст] / Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, А.Н. Кокора. – М.: Машиностроение, 1975. – 296 с. 5. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача [Текст] / А. А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Эдиториал, 2003. – 784 с. 6. Кудинов, В.А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций [Текст] / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с. 7. Губин, А.И. Математическое моделирование тепловых процессов при лазерной обработке материалов на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности [Текст] / А.И. Губин, Ю.А. Малая // Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика: збірник наукових праць. – Вип. 3. – Дніпропетровськ: Нова ідеологія, 2011. – С. 72-85. 8. Веселовський, В.Б. Математичне моделювання теплопровідності для складених тіл з урахуванням узагальненого закону Фур'є [Текст] / В.Б. Веселовський, Ю.А. Мала, А.В. Сяєв // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон, 2009. – С. 141-146. 9. Веселовский, В.Б. Математическое моделирование тепловых процессов при поверхностном упрочнении элементов конструкций [Текст] / В.Б. Веселовский, Ю.А. Малая, А.И. Губин, В.И. Ляшенко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: «Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 5. – С. 121-128. – ISSN 2078-774X.

© Малая Ю.А., Губин А.И., 2012  
Поступила в редколлегию 15.02.12