УДК 62-752.8(088.8)

В.С. ГАПОНОВ, д-р техн. наук; проф. НТУ «ХПИ»;
А.И. НАУМОВ, инженер НТУ «ХПИ»;
Ю.А. ОСТАПЧУК, канд. техн. наук; доц. НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ОПОРЫ С УПРАВЛЯЕМОЙ КВАЗИНУЛЕВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ РОТОРНЫХ СИСТЕМ

Предложена математическая модель упругой опоры с управляемой квазинулевой жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем с целью использования в задаче обеспечения управления их статической и динамической жесткостями.

Запропонована математична модель упругої опори з керованою квазінульовою жорсткістю для підшипників високошвидкістних роторних систем з наміром використання в задаче забезпечення керування їх статичними та динамічними жорсткостями.

Questions of influence of radial backlashes in coged gearing on a elutch at which specific loading increases by each, on a resource coupler are considered. The estimation method of a residual resource on pressure of a bend of cogs and a calculation example is shown.

Анализ публикаций. В работе [1] проведен анализ конструкций и функциональных возможностей упругих опор подшипников высокоскоростных роторных систем. Установлено, что существующие упругие опоры не решают задачу одновременного обеспечения статической и динамической жесткости роторных систем. Поэтому предложен новый принцип работы упругих опор, позволяющий управлять характеристиками жесткости [2, 3]. Опоры с новым принципом работы упругих элементов требуют соответствующей математической модели.

Цель исследования. Целью исследования является обоснование математической модели упругой опоры с управляемой квазинулевой жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем.

Основная часть. Рассматриваемая опора подшипников ротора [2] состоит из трех основных частей (рис. 1), которые механически связанные между собою: несущей системы, корректора жесткости и системы регулирования [3].

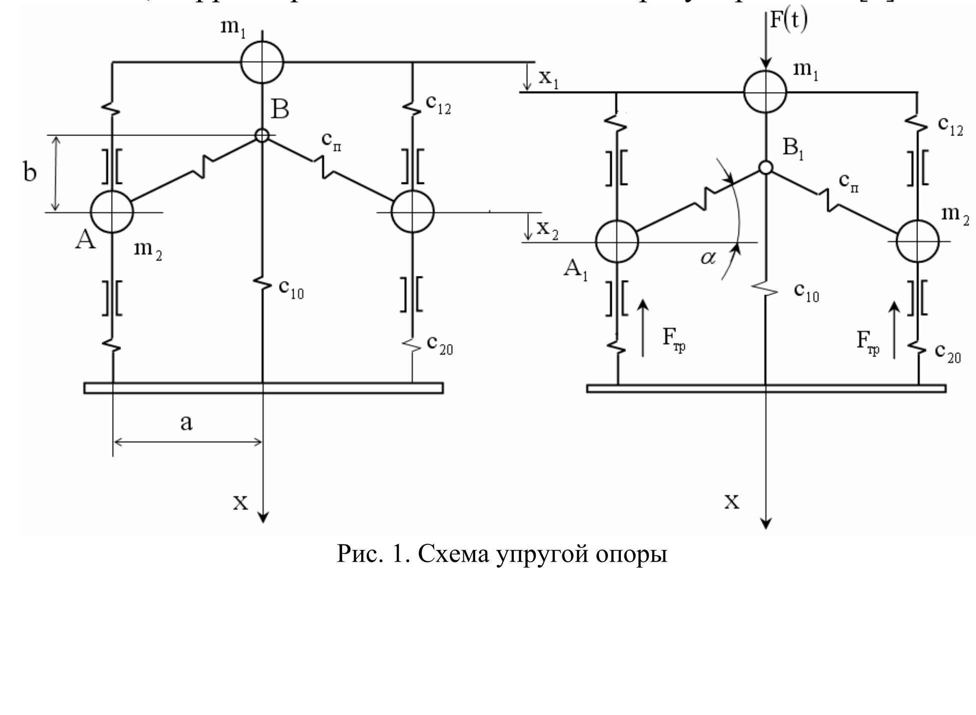

Рис. 1. Схема упругой опоры

Несущая система обеспечивает необходимую несущую способность ротора. Корректор жесткости *AB* за счет параллельного подключения к несущей системе упругих элементов, имеющих отрицательную жесткость, обеспечивает реализацию упругой характеристики с участком квазинулевой жесткости на рабочем режиме работы системы. Автоматическая поддержка участка квазинулевой жесткости упругой характеристики в положении, которое отвечает рабочему режиму, осуществляется пассивным регулятором.

Геометрические параметры опоры подшипников

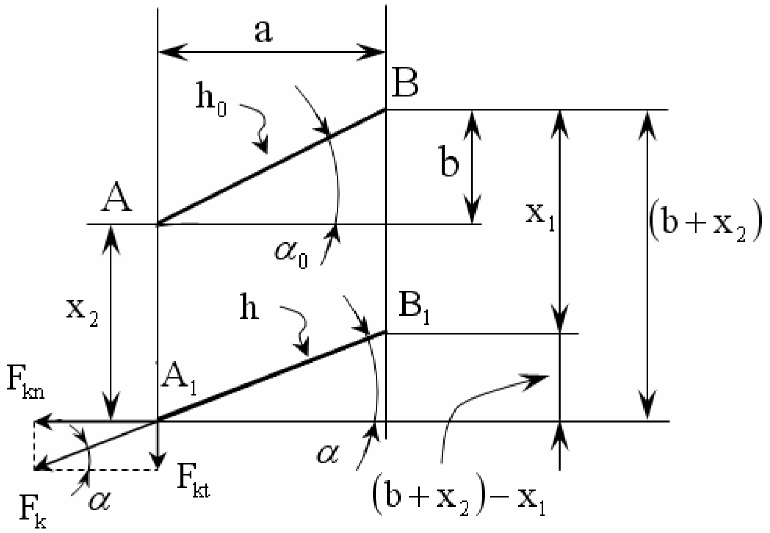

Рис. 2. Зависимость между безразмерными координатами

$$h_0 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \qquad h = \sqrt{h_0^2 + 2b(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2}\,.$$

Сила в корректоре $F_k = C_п(h_0 - h)$, где $C_п$ – жесткость пружины корректора.

Сила трения в направляющих управляющей подсистемы

$$F_{ТР} = F_{kn} \cdot f\,; \quad F_{kn} = F_k \cdot \cos\alpha = C_п(h_0 - h)\cdot\frac{a}{h}\,;$$

$$f = \begin{cases} f \leftarrow \dot{x}_2 < 0 \\ 0 \leftarrow \dot{x}_2 = 0 \\ -f \leftarrow \dot{x}_2 > 0 \end{cases}; \quad F_{ТР} = C_п(h_0 - h)\cdot\frac{a}{h}\cdot f\,.$$

Условие самоторможения

$$f \geq \frac{(b + x_2) - x_1}{a}\,.$$

Уравнения движения системы

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + m_2\dot{x}_2^2\,. \tag{1}$$

Потенциальная энергия системы

$$П = \frac{C_{10}x_1^2}{2} + C_{20}x_2^2 + C_{12}(x_2 - x_1)^2 + C_п(h_0 - h)^2\,. \tag{2}$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}+F_i(t);$$

$$\left.\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+C_{10}x_1-2C_{12}(x_2-x_1)+2C_{\text{п}}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)(b+x_2-x_1)=F(t);\\ &m_2\ddot{x}_2+C_{20}x_2+C_{12}(x_2-x_1)-C_{\text{п}}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)(b+x_2-x_1-af)=0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Статика системы

Из $(F(t)=F;\ \ddot{x}_1=\ddot{x}_2=0)$ подстановкой в (3) следует

$$\left.\begin{aligned} &C_{10}x_1-2C_{12}(x_2-x_1)+2C_{\text{п}}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)(b+x_2-x_1)=F;\\ &C_{20}x_2+C_{12}(x_2-x_1)-C_{\text{п}}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)(b+x_2-x_1-af)=0\end{aligned}\right\}$$

или, обозначив $x_1-x_2\overset{def}{=}Z$, имеем условие самоторможения $f\geq\frac{b-Z}{a}$ и уравнение статики системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F}{C_{10}}=\left(1+C_{12}\frac{C_{10}+2C_{20}}{C_{10}C_{20}}\right)Z+C_{\text{п}}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)\left[\frac{C_{10}+2C_{20}}{C_{10}C_{20}}(b-Z)-\frac{a}{C_{20}}f\right];\\ &h=\sqrt{a^2+(b-Z)^2}.\end{aligned}\right\}$$

В безразмерном виде геометрические параметры:

$$\overline{x}_1=\frac{x_1}{b};\quad \overline{x}_2=\frac{x_2}{b};\quad \overline{Z}=\frac{Z}{b};\quad \overline{h}=\sqrt{\overline{h}_0^2-2\overline{Z}+\overline{Z}^2};$$

$$\frac{F}{b\cdot C_{10}}=(1+C_{12}\pi_c)\overline{Z}+C_{\text{п}}\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}-1\right)\left(\pi_c(1-\overline{Z})-\pi_f\right),$$

где
$$\pi_c=\frac{C_{10}+2C_{20}}{C_{10}C_{20}};\quad \pi_f=\frac{f}{C_{10}\mathrm{tg}\alpha_0}.$$

Жесткость системы

$$(b\cdot C_{10})^{-1}\frac{dF}{d\overline{Z}}=1+C_{12}\cdot\pi_c+C_{\text{п}}\left[\frac{\overline{h}_0(1-\overline{Z})}{\overline{h}^3}\left(\pi_c-(1-\overline{Z})-\pi_f\frac{2}{C_{10}}\right)-\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}-1\right)\pi_c\right].$$

Рассмотрим нули функции жесткости системы, соответствующие участку квазинулевой жесткости опоры подшипников

$$(b\cdot C_{10})^{-1}\frac{dF}{d\overline{Z}}=0.$$

Введем функцию

$$y=1+C_{12}\cdot\pi_c+C_{\text{п}}\left[\frac{\overline{h}_0(1-\overline{Z})}{\overline{h}^3}\left(\pi_c-(1-\overline{Z})-\pi_f\frac{2}{C_{10}}\right)-\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}-1\right)\pi_c\right]=0;$$

$$\overline{x}_1=\left(1+C_{12}\left(\pi_c-\frac{2}{C_{10}}\right)\overline{Z}\right)+C_{\text{п}}\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}-1\right)(1-\overline{Z})\left(\pi_c-\frac{2}{C_{10}}\right)-\pi_f;$$

$$\overline{x}_2=\overline{x}_1-\overline{Z};$$

$$\lim_{C_{20}\to\infty} \pi_c = \lim_{C_{20}\to\infty}\left(\frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{10}}\right) = \frac{2}{C_{10}}; \quad C_{12} = 0; \quad \lim_{C_{20}\to\infty} \pi_f = 0,$$

следовательно,

$$\frac{F}{b \cdot C_{10}} = \overline{Z} + C_{\text{п}}\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}} - 1\right) \cdot \frac{2}{C_{10}}\left(1 - \overline{Z}\right);$$

$$\overline{x}_1 = \overline{Z} + C_{\text{п}}\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}} - 1\right)\left(\left(1 - \overline{Z}\right)\left(\frac{2}{C_{10}} - \frac{2}{C_{10}}\right)\right) = \overline{Z}; \quad \overline{x}_1 = \overline{Z};$$

$$y = 1 + 2\frac{C_{\text{п}}}{C_{10}}\left[\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}\left(\frac{\left(1 - \overline{Z}\right)^2}{\overline{h}^2} - 1\right) + 1\right] = 0;$$

$$\frac{F}{b \cdot C_{10}} = \overline{x}_1 + 1\frac{C_{\text{п}}}{C_{10}}\left(\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}} - 1\right) \cdot \left(1 - \overline{x}_1\right);$$

$$y = 1 + 2\frac{C_{\text{п}}}{C_{10}}\left[\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}\left(\frac{\left(1 - \overline{x}_1\right)^2}{\overline{h}^2} - 1\right) + 1\right] = 0; \tag{4}$$

$$\overline{h} = \sqrt{\overline{h}_0^2 - 2\overline{x}_1 + \overline{x}_1^2}\ .$$

Проведем анализ уравнения (4).

Параллельный перенос осей декартовых координат $\overline{x}_1 = \overline{x}_1' + 1$ дает

$$\overline{h} = \sqrt{\overline{h}_0^2 + \overline{x}_1'^2 - 1}; \quad y = 1 + 2\frac{C_{\text{п}}}{C_{10}}\left[\frac{\overline{h}_0}{\overline{h}}\left(\frac{\overline{x}_1'^2}{\overline{h}^2} - 1\right) + 1\right].$$

Тогда $y(\overline{x}_1') = y(-\overline{x}_1')$ функция четная, следовательно, $y(\overline{x}_1)$ симметрична относительно $\overline{x}_1 = 1$ (рис. 3).

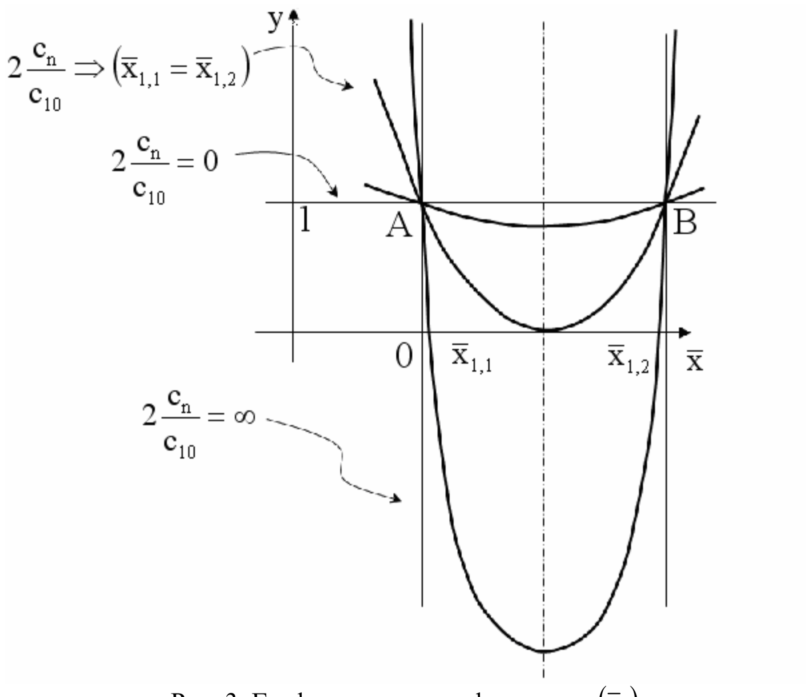

Рис. 3. График изменения функции $y(\overline{x}_1)$

$$\lim_{x_1\to\infty} y(\bar{x}_1) = \infty; \quad 2\frac{C_п}{C_{10}} \Rightarrow (\bar{x}_{1,1} = \bar{x}_{1,2}); \quad 2\frac{C_п}{C_{10}} = 0;$$

$$\lim_{x_1\to\infty} y(\bar{x}_1) = 1; \quad \frac{C_п}{C_{10}} \to 0; \quad \frac{C_п}{C_{10}} \to \infty.$$

Из совместного решения $y = 1$ и $y(\bar{x}_1')$ следует, что точки A и B пересечения $y(\bar{x}_1)$ и $y = 1$ не зависят от $C_п \cdot C_{10}^{-1}$ и, следовательно, существуют для всех $C_п \cdot C_{10}^{-1}$. Координаты A и B (рис. 2)

$$\bar{x}'_{A,B} = \pm\sqrt{\left[\bar{h}_0\left(\bar{h}_0^2 - 1\right)\right]^{\frac{2}{3}} - \left(\bar{h}_0^2 - 1\right)}.$$

Кратному нулю $\bar{x}_{1,1} = \bar{x}_{1,2} = 1$ соответствует область существования нулей

$$2\frac{C_п}{C_{10}} \geq \left(\frac{\bar{h}_0}{\sqrt{\bar{h}_0^2 - 1}} - 1\right)^{-1} \overset{def}{=} K_H$$

и квазинулевому участку упругой характеристике опоры (рис. 4) соответствует

$$2\frac{C_п}{C_{10}} \geq K_П.$$

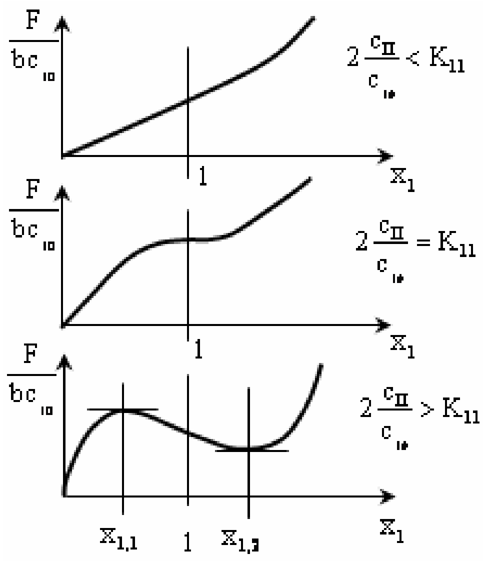

Рис. 4. Качественная зависимость упругой характеристики опоры от безразмерных координат

Из симметрии $y(\bar{x}_1)$ относительно $\bar{x}_1 = 1$ следует симметрия $\bar{x}_{1,1}$ и $\bar{x}_{1,2}$ относительно $\bar{x}_1 = 1$.

Линии равного уровня $\bar{x}_1 = \text{const}$ на плоскости $\left(\alpha_0, 2C_п \cdot C_{10}^{-1}\right)$ показаны на рис. 5.

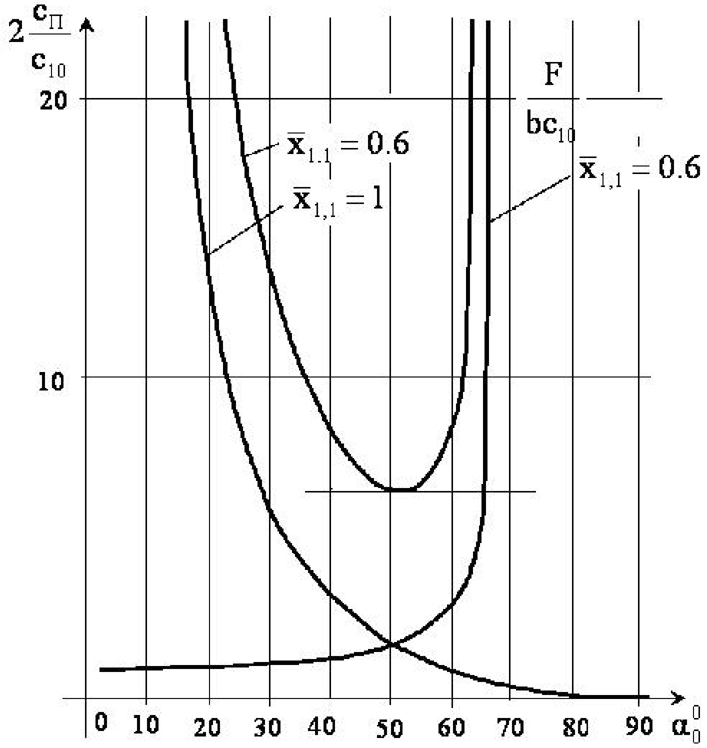

Рис. 5. Линии равного уровня на плоскости параметров упругой опоры

Полученные зависимости позволят разрабатывать опоры с управляемой квазинулевой жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем, которые имеют максимально возможную статическую жесткость на нерабочих режимах и минимально возможную жесткость опоры на рабочих, что обеспечит максимально возможную динамическую жесткость и, следовательно, точность работы высокоскоростных роторных систем с сохранением требуемого ресурса.

Список литературы: **1.** *Гапонов, В.С.* Аналитический обзор литературы по вопросам конструктивного обеспечения динамической устойчивости высокоскоростных роторных систем [Текст] / В.С. Гапонов, А.В. Гайдамака, Е.Ю. Гладыщева // Машиноведение и САПР. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2010. – № 19. – С. 39-44. **2.** Патент на винахід 62934 Україна. Пасивна віброзахисна система з керованою квазінульовою жорсткістю / В.С. Гапонов, П.М. Калінін. – 2004. – Бюл. № 1. **3.** *Гапонов, В.С.* Упругая опора подшипников ротора с управляемым изменением квазинулевой жесткости [Текст] / В.С. Гапонов, А.И. Наумов // Вісник НТУ «ХПІ». – 2010. – № 33. – С. 68-73.

Поступила в редколлегию 15.02.12