

УДК 519.6:533.6

М.Н. ГРИЗУН, преподаватель-стажер НТУ «ХПИ»;

С.В. ЕРШОВ, д-р техн. наук; проф. ИПМаш НАН Украины, Харьков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НЬЮТОНА

Построена неявная итерационная разностная схема на основе метода Ньютона для многомерных уравнений газодинамики в форме Навье-Стокса. При дискретизации исходных уравнений для дифференциальных операторов не используются методы линеаризации и факторизации. Аппроксимация временных производных осуществляется на трехточечном шаблоне с помощью обратной разностной формулы второго порядка точности, пространственные производные аппроксимируются схемами повышенной точности *TVD* и *ENO*. Выполнено численное моделирование вязких трехмерных и невязких двухмерных течений. Показано согласование полученных решений с экспериментом. Проведена оценка скорости сходимости и предельного числа Куранта для неявной итерационной схемы и схемы Бима-Уорминга.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, неявная итерационная схема, метод Ньютона, *TVD*, *ENO*, порядок аппроксимации.

Введение. В последнее время наблюдается интенсивное развитие вычислительной аэродинамики. Методы численного моделирования трехмерных течений на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса сегодня занимают прочное положение в системах проектирования турбомашин и используются для проверочных расчетов и доводки проточных частей. В тоже время включение этих методов в современные оптимизационные пакеты затруднительно, так как время расчета трехмерного течения вязкого газа в лопаточных аппаратах в зависимости от решаемой задачи и используемой вычислительной техники может составлять от нескольких часов до нескольких месяцев. Одним из путей преодоления этой проблемы является повышение эффективности современных численных методов: разработка численных алгоритмов, обеспечивающих ускорение сходимости решений.

Для решения множества задач аэродинамики применяются как явные, так и неявные разностные схемы. Среди распространенных явных разностных схем можно выделить схему Годунова [1], схемы повышенной точности *TVD* Колгана [2], *ENO* Хартена [3], *ISNAs* Зийлемы [4]. Однако невысокая вычислительная эффективность таких схем привела к необходимости разработки неявных разностных методов, которые, тем не менее, могут быть построены на основе вышеприведенных явных схем. Среди неявных схем предпочтение сегодня отдается итерационным методам, основанным на идеях Гаусса-Зейделя [5], схемам на основе методов переменных направлений, например, схеме Бима-Уорминга [6] и др. Хотя устойчивость неявных разностных схем выше, чем у явных, а сходимость быстрее, тем не менее, время расчета течений, представляющих сегодня практический интерес, оказывается чрезмерно большим. Кроме того, многие неявные методы построены с использованием приближенных подходов: линеаризации и факторизации, что приводит к снижению точности решений.

В настоящей работе рассматриваются результаты численного моделирования двухмерных и трехмерных течений невязкого и вязкого газа вокруг изолированного профиля и в решетке турбины с использованием новой итерационной разностной схемы, построенной на основе метода Ньютона и не использующей при аппроксимации

© М.Н. Гризун, С.В. Ершов, 2013

исходных уравнений линеаризации и факторизации дифференциальных операторов. Основное внимание уделено вопросам точности моделирования двухмерных и трехмерных течений невязкого и вязкого газа, и скорости сходимости решений.

Постановка задачи. В предложенной работе рассматриваются вязкие трехмерные и невязкие двухмерные течения в решетках профилей, которые могут быть описаны системами уравнений в форме Навье-Стокса и Эйлера соответственно. Система уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу в криволинейной трехмерной системе координат в консервативной форме имеет вид:

$$\frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi^j} = 0; \tag{1}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix}; \quad \hat{F}_j = \hat{F}_j^I - \hat{F}_j^V = |J| \begin{pmatrix} \rho U^j \\ \rho U^j u_1 + \xi_1^j p \\ \rho U^j u_2 + \xi_2^j p \\ \rho U^j u_3 + \xi_3^j p \\ (\rho e + p) U^j \end{pmatrix} - |J| \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1^j \tau_{i1} \\ \xi_1^j \tau_{i2} \\ \xi_1^j \tau_{i3} \\ \xi_1^j \tau_{ik} u_k - \xi_1^j q_i \end{pmatrix},$$

где t – время; Q – вектор консервативных переменных; $|J|$ – Якобиан преобразования координат; ρ – плотность; u_i – декартовы компоненты скорости; e – полная энергия единицы массы; p – давление; \hat{F}_j – векторы потоков; $U^j = \xi_i^j u_i$ – контравариантные компоненты вектора скорости; $\xi_j^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}$ – метрические коэффициенты; τ_{ij} – тензоры вязких напряжений; q_i – потоки тепла; индексы i, j, k принимают значения $\overline{1,3}$, здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

При проведении расчетов турбулентных течений исходные уравнения дополняются дифференциальной моделью турбулентности $k-\omega$ SST [7].

Система Эйлера для описания течений невязкого газа в двухмерной системе координат не приводится, в связи с тем, что может быть очевидно получена из системы уравнений Навье-Стокса, если пренебречь вязкостью и теплопроводностью, а также исключить третье координатное направление.

Итерационная разностная схема. Для левой части системы уравнений Навье-Стокса (1) введено следующее обозначение:

$$R(Q) = \frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi^j}.$$

Система уравнений (1) является нелинейной. К такой системе метод Ньютона [8] может быть применен в такой форме (k – номер итерации):

$$\frac{\partial R(Q^k)}{\partial Q}(Q^{k+1} - Q^k) = -R(Q^k). \quad (2)$$

Производная $\frac{\partial R(Q^k)}{\partial Q}$ в системе (2) может быть вычислена приближенно с помощью численного дифференцирования, откуда итерационная формула Ньютона (2) для системы (1) приобретает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial J|Q}{\partial t}\right)^{k+1} - \left(\frac{\partial J|Q}{\partial t}\right)^k + \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left((\hat{A}_j)^k \delta Q^{k+1} \right) = - \left(\frac{\partial J|Q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi^j} \right)^k, \quad (3)$$

где $\delta Q^{k+1} = Q^{k+1} - Q^k$ – приращение параметров на одной итерации; \hat{A}_j – матрицы Якоби невязких потоковых членов \hat{F}_j^l системы (1).

Производные по времени приближенно выражаются при помощи трехслойной обратной разностной формулы [9]. Производные по пространству в правой части итерационной формулы (3) аппроксимируются полностью неявно. Конкретный вид записи разностных аналогов пространственных производных будет рассмотрен ниже. После интегрирования равенства (3) по объему двухмерной ячейки и выполнения ряда преобразований можно получить следующую неявную итерационную разностную схему:

$$\left[I + \frac{2}{3} \frac{\Delta t_m}{|J_m|} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\hat{A}_j)_m^{n+1,k} \right] \delta Q_m^{n+1,k+1} = -\Delta Q_m^{n+1,k} + \frac{1}{3} \Delta Q_m^n - \frac{2}{3} \frac{\Delta t_m}{|J_m| \Delta V_m^\xi} \left\{ (\hat{F}^j)_{m+1/2}^{n+1,k} \Delta \xi_{m+1/2}^s \Delta \xi_{m+1/2}^l - (\hat{F}^j)_{m-1/2}^{n+1,k} \Delta \xi_{m-1/2}^s \Delta \xi_{m-1/2}^l \right\}, \quad (4)$$

где $s, l \neq j$, по j – суммирование; Δt_m – шаг по времени; ΔV_m^ξ – объем трехмерной ячейки; n – номер временного слоя; $\Delta Q_m^n = Q_m^n - Q_m^{n-1}$ – приращение параметров на одном шаге по времени; $\Delta Q_m^{n+1,k} = Q_m^{n+1,k} - Q_m^n$ – суммарное приращение в итерационном процессе на одном шаге по времени; $m = m_1, m_2, m_3$ – индекс, обозначающий привязку к некоторой ячейке разностной сетки; $m \pm 1/2$ – номер середины стороны сеточной ячейки по соответствующему сеточному направлению; $\Delta \xi_{m \pm 1/2}^j$ – длины сторон сеточной ячейки.

В правой части разностной схемы (4) аппроксимация исходных уравнений (1) выполнена неявно без использования приближенных линеаризации и факторизации, применение которых в левой части (4) не оказывает влияние на точность решения при достижении сходимости.

Следует отметить, что построенная итерационная разностная неявная схема (4) на первой итерации совпадает с классической неявной схемой Бима-Уорминга [6]. Это позволяет утверждать, что нет нужды добиваться полной сходимости итерационного процесса, так как уже на первой итерации схема (4) имеет формально второй порядок аппроксимации по пространству.

Аппроксимация пространственных производных в правой части.

Потоковые слагаемые, содержащие невязкие члены \hat{F}_j^I , в правой части схемы данной работы (4) определяются с помощью решения задачи одномерного распада произвольного разрыва [1] на стороне сеточной ячейки в соответствующем пространственном направлении:

$$\left(\hat{F}_j^I\right)_{m\pm 1/2}^{n+1,k} = H\left(Q_{m\pm 1/2}^-, Q_{m\pm 1/2}^+\right),$$

где $Q_{m\pm 1/2}^\mp = Q_m \pm \frac{\Delta \xi_m^j}{2} (Q'_m)^\mp$ – начальные условия для задачи одномерного распада разрыва, $\Delta \xi_m^j$ – величина сеточного шага в соответствующем криволинейном направлении сетки; $(Q'_m)^\mp$ – производные восполнения параметров по пространству внутри сеточной ячейки, способ нахождения которых определяет следующие разностные схемы:

1) *TVD* схема Годунова-Колгана [2] второго порядка точности:

$$(Q'_m)^\mp = \text{mm}(\hat{\Delta}Q_m, \hat{\Delta}Q_{m+1});$$

2) *TVD* схема с ограничителем *ISNAS* [4] третьего порядка точности:

$$(Q'_m)^\mp = \begin{cases} \hat{\Delta}Q_{(m+1/2)\pm 1/2} \frac{(\hat{\Delta}Q_m)^2 + 3\hat{\Delta}Q_m \hat{\Delta}Q_{m+1}}{(\hat{\Delta}Q_m + \hat{\Delta}Q_{m+1})^2}, & \hat{\Delta}Q_m \hat{\Delta}Q_{m+1} > 0; \\ 0, & \hat{\Delta}Q_m \hat{\Delta}Q_{m+1} \leq 0; \end{cases}$$

3) *ENO* схема [3] второго порядка точности:

$$(Q'_m)^\mp = \text{mm}\left(\hat{\Delta}Q_m + \frac{1}{2} \text{mm}(\nabla Q_{m-1}, \nabla Q_m), \hat{\Delta}Q_{m+1} - \frac{1}{2} \text{mm}(\nabla Q_m, \nabla Q_{m+1})\right); \quad (5)$$

где $\text{mm}(a, b) = \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sgn}(a) \cdot \min(|a|, |b|), & a \cdot b > 0; \\ 0, & a \cdot b \leq 0; \end{cases} \quad \hat{\Delta}Q_m = \frac{Q_m - Q_{m-1}}{\frac{1}{2}(\Delta \xi_m^j + \Delta \xi_{m-1}^j)}$;

$\nabla Q_m = \frac{\Delta \xi_m^j + \Delta \xi_{m-1}^j}{\frac{1}{2}(\Delta \xi_{m+1}^j + 2\Delta \xi_m^j + \Delta \xi_{m-1}^j)} (\hat{\Delta}Q_{m+1} - \hat{\Delta}Q_m)$ – приращения по пространству.

Потоковые члены \hat{F}_j^V , в правой части схемы (4) вычисляются по вязким напряжениям, тепловым потокам и значениям примитивных переменных, определенных с помощью решения задачи одномерного распада разрыва на стороне сеточной ячейки в соответствующем пространственном направлении.

Схема (4) реализована в *CFD*-решателе программного комплекса *F* [12] наряду с известной неявной схемой Бима-Уорминга.

Свойства схем. Выполнено исследование некоторых свойств, таких как устойчивость и порядок аппроксимации, для неявной итерационной разностной схемы (4) данной работы, записанной для невязких уравнений Эйлера. В частности, доказана устойчивость явной *ENO*-схемы, которая может быть использована в правой части (4) при аппроксимации пространственных производных невязких потоковых членов. Также показано, что в случае выбора трехточечного шаблона для производной по времени и дискретизации пространственных производных потоковых членов со вторым порядком точности, неявная итерационная схема (4) аппроксимирует систему уравнений Эйлера со вторым порядком по пространству и времени на гладких решениях.

Численные результаты. Проведены численные исследования предложенной неявной итерационной схемы (4) с пространственной аппроксимацией повышенной точности в правой части. Рассмотрены трехмерное течение вязкого газа в решетке профилей Ходсона [10], а также двухмерное обтекание невязким газом профиля NASA0012 [11]. В качестве граничных условий на входе расчетной области заданы параметры торможения: полное давление, полная температура, и угол направления потока; на выходе – статическое давление. На твердых стенках предполагается справедливость условия непротекания (для течений невязкого газа – условие скольжения, а для вязкого газа – условие прилипания). В решетке на границах, отделяющих рассматриваемый межлопаточный канал от соседних каналов, выполняются условия периодичности потока.

Для расчетов обтекания профиля NASA0012 использовалась расчетная сетка с 75000 (250×300) ячеек. На рис. 1 приведены распределения коэффициента давления C_p вдоль хорды профиля на двух режимах: дозвуковом с углом атаки $-1,25^\circ$ (см. рис. 1а) и сверхзвуковом с углом атаки -7° (см. рис. 1б). На рис. 1а кривая 1 соответствует распределению, полученному авторами работы [11], кривая 2 – по схеме данной работы для двухмерных невязких течений, на рис. 1б такие распределения совпадают. Графики позволяют сделать вывод о приемлемом согласовании результатов по положению скачков. В тоже время результаты настоящей работы показывают лучшее выделение скачков.

Также проведено сравнение скорости сходимости решения по схеме данной работы (4) и по классической схеме переменных направлений Бима-Уорминга [6]. Рис. 2 иллюстрируют распределение полной силы для двух вышеупомянутых режимов течения на профиле, полученных по двум неявным схемам с явной *ENO*-аппроксимацией (5) потоков в правой части. Очевидно, что схема данной работы имеет более высокую скорость сходимости, чем схема Бима-Уорминга.

В табл. 1 приведены данные по времени расчета, предельному числу Куранта (*CFL*) и необходимому для сходимости количеству шагов по времени. Необходимо отметить, что время выполнения одной итерации по неявной итерационной схеме и одного шага по времени по схеме Бима-Уорминга примерно равны. Видно, что для первого и второго режимов удалось повысить предельное число Куранта в 5 и в 10 раз соответственно, уменьшить время расчета на 20 % и 75 % соответственно.

Проведены расчеты трехмерного течения вязкого газа в решетке Ходсона. Для проведения расчетов выбрана разностная сетка, состоящая из 1015680 (92×92×120) ячеек. На рис. 3 показаны изолинии числа Маха в среднем сечении на тангенциальной поверхности: а – по схеме данной работы (4), б – по схеме Бима-Уорминга. Для обеих

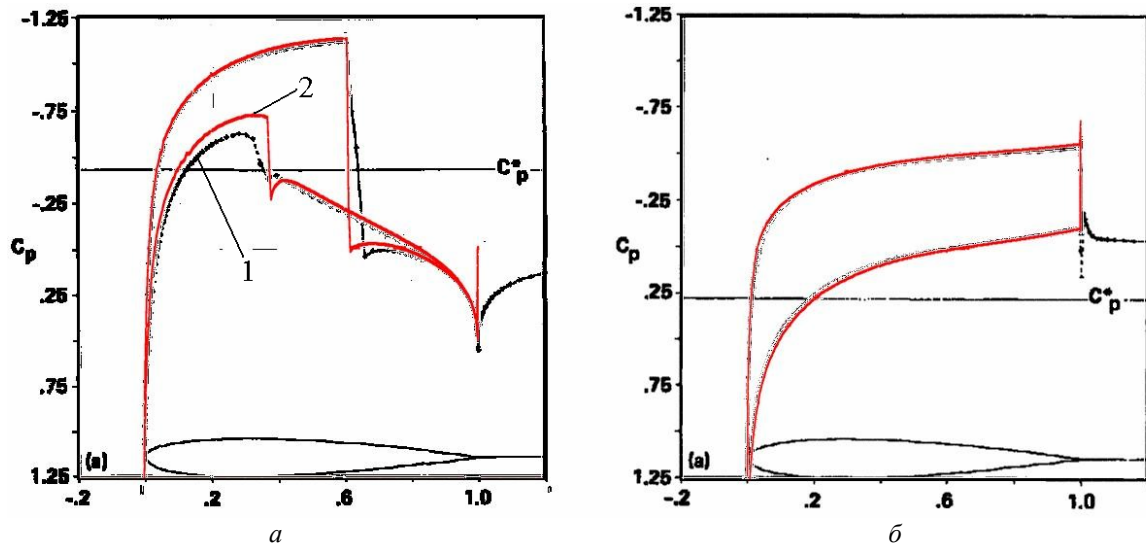


Рис. 1 – Распределение коэффициента давления на профиле NACA0012:

a – дозвуковой режим, угол атаки $-1,25^\circ$; *б* – сверхзвуковой режим, угол атаки -7°

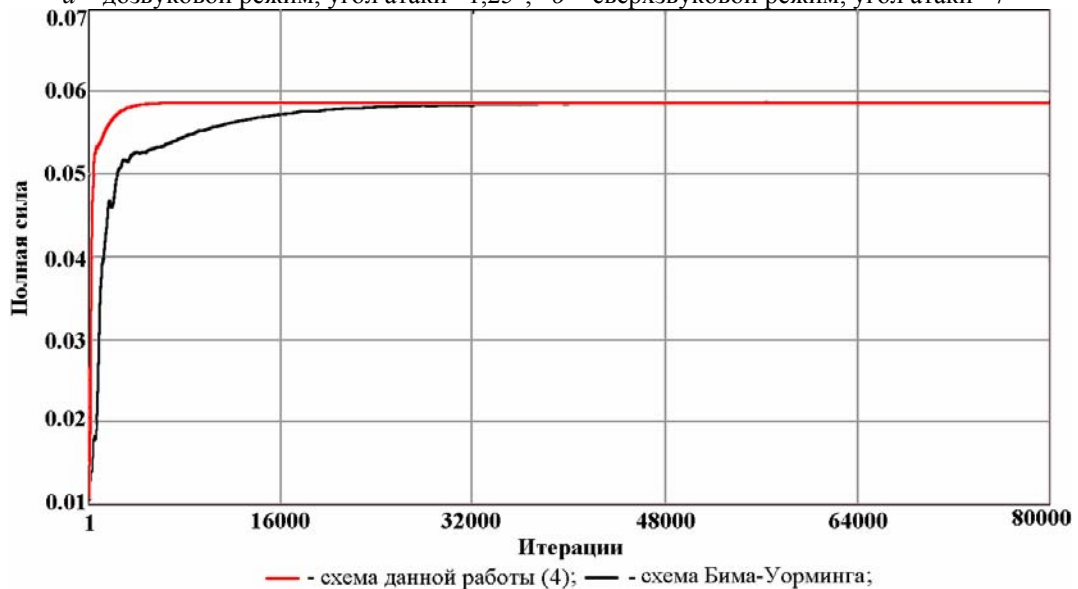


Рис. 2 – Распределение полной силы на профиле NACA0012, сверхзвуковой режим, угол атаки -7°

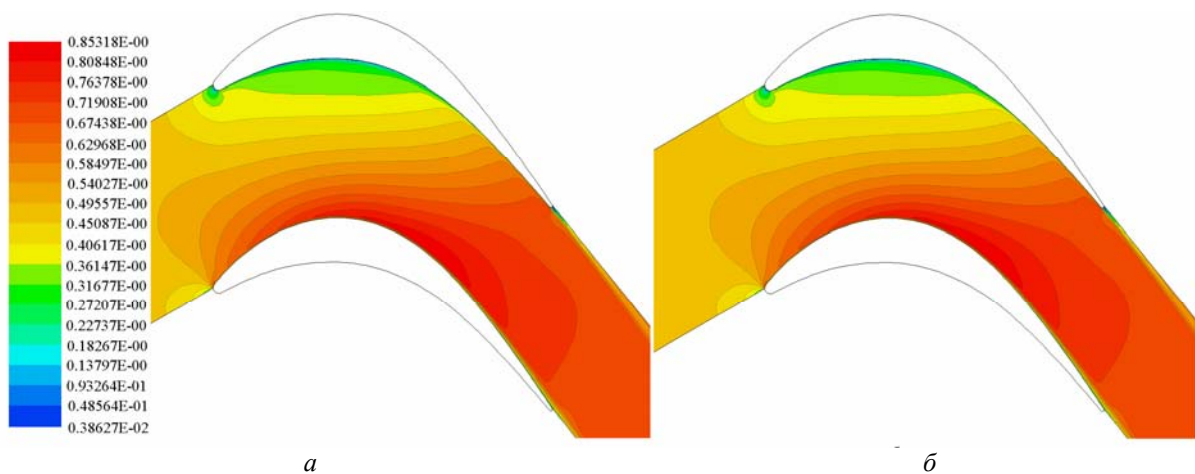


Рис. 3 – Изолинии числа Маха в решетке Ходсона:

a – по схеме данной работы (4), *б* – по схеме Бима-Уорминга

Таблиця 1

Оценка предельного числа Куранта и времени сходимости по схемам данной работы (4) и Бима-Уорминга для расчета обтекания профиля НАСА0012

Режим течения	Схема Бима-Уорминга			Схема данной работы (5)			
	<i>CFL</i>	<i>S</i>	Шагов по времени	<i>CFL</i>	<i>S</i>	Шагов по времени	Приведенное время расчета ¹⁾
$M < 1,$ $\alpha = -1,25^\circ$	3	–	50000	15	0,25	20000	0,8
$M > 1,$ $\alpha = -7,0^\circ$	1	–	80000	10	0,75	10000	0,25

¹⁾ отношение времени расчета по схеме данной работы ко времени расчета по схеме Бима-Уорминга

схем потоки в правой части аппроксимируются с помощью явной *ENO*-схемы (5). Графики позволяют сделать вывод о согласовании решений, полученных по двум указанным схемам.

Выполнено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [10]. На рис. 4 приведены результаты визуализации течения на торцевой поверхности, полученные экспериментально и при расчете по разностной схеме настоящей работы. В обоих случаях можно заметить седловую точку, линии стекания потока, соответствующие ветвям подковообразного вихря и угловому вихрю, перетекание от стороны давления к стороне разрежения, формирующее канальный вихрь. В целом следует отметить качественное согласование численных и экспериментальных данных для течения в окрестности торцевой поверхности. В тоже время, следует заметить, что ни в данной работе, ни при ранее проведенных расчетах с помощью *CFD* решателей *F* [12] и *FlowER* [13, 14] для рассматриваемой модели турбулентности не удалось точно смоделировать отрывное течение на поверхности лопатки. Этот вопрос будет изучен в дальнейших исследованиях.

В таблице 2 приведены данные по времени расчета, предельному числу Куранта и необходимому для сходимости количеству шагов по времени. Видно, что предельное число Куранта при расчете вязких течений в решетке Ходсона было увеличено в 5 раз на первом уровне сетки, в 3 раза на втором и более чем в 2 раза на третьем. Скорость сходимости в среднем увеличилась на 35 %. График сходимости по полной силе, действующей на лопатку, приведен на рис. 5.

Таблиця 2

Оценка предельного числа Куранта и времени сходимости по схемам данной работы (4) и Бима-Уорминга в решетке Ходсона

Уровень сетки	<i>BW (ENO)</i>		<i>Newton (ENO) (5)</i>		Приведенное время расчета ¹⁾
	<i>CFL</i>	Шагов по времени	<i>CFL</i>	Шагов по времени	
<i>I</i>	8	1000	40	250	0.5
<i>II</i>	8	2500	25	700	0.56
<i>III</i>	5	7000	12	3000	0.85

¹⁾ отношение времени расчета по схеме данной работы ко времени расчета по схеме Бима-Уорминга.

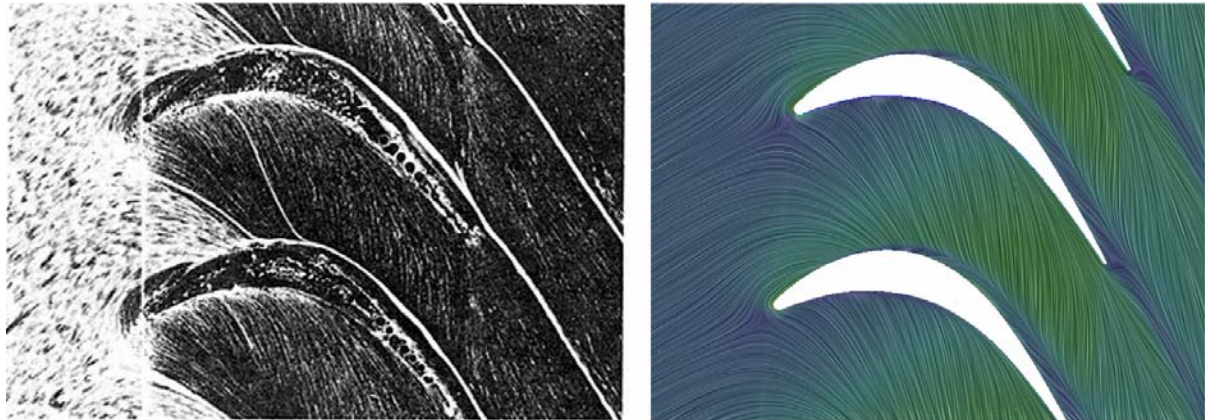


Рис. 4 – Визуалізація течення на торцевій поверхності для решітки Ходсона:
 а – експериментальні дані; б – предельні лінії тока,
 отримані за чисельними результатами нинішньої роботи

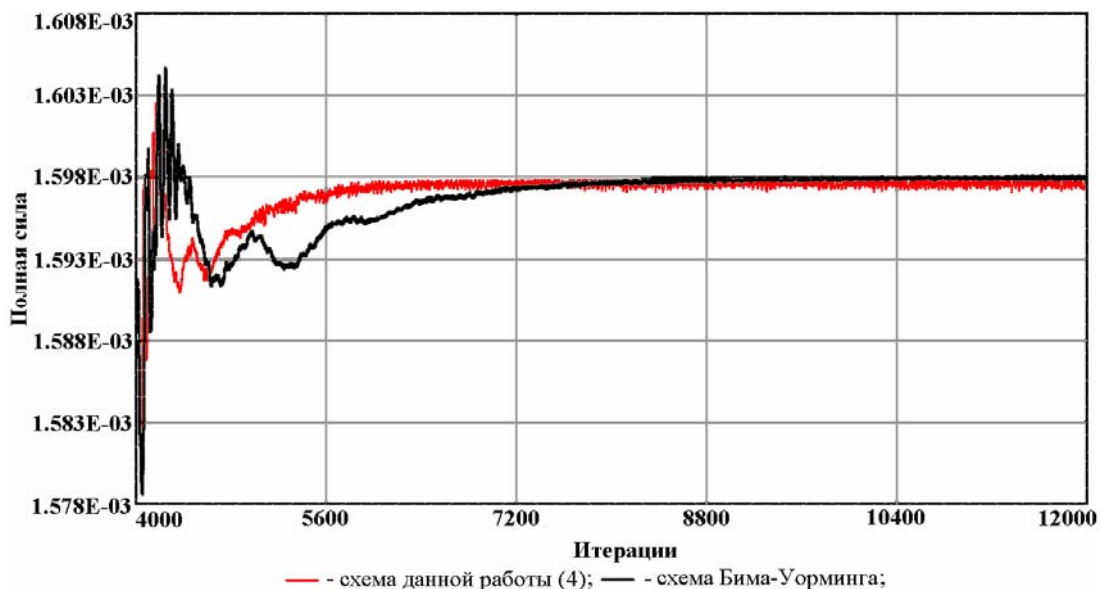


Рис. 5 – Розподіл повної сили на третьому рівні сітки (решітка Ходсона)

Выводы. В настоящей работе для решения системы уравнений Навье-Стокса построена неявная итерационная разностная схема на основе явных схем повышенной точности: *TVD*, *ENO*. Предложенная схема лишена погрешностей, возникающих в случае применения приближенных методов линеаризации, факторизации и т.д. Приведенный подход построения схемы позволяет добиться второго порядка аппроксимации по времени и по пространству на гладких решениях. Численное исследование показало, что построенная схема имеет более высокое быстродействие и является устойчивой при бóльших шагах по времени по сравнению с классической схемой Бима-Уорминга. Результаты, полученные по схеме данной работы, приемлемо согласуются с экспериментальными данными.

Список литературы: 1. Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики [Текст] / С.К. Годунов // Матем. сб. – 1959. – Т. 47, Вып. 3. – С. 276-306. 2. Исследование возможностей модификации В.П. Колгана численной схемы С.К. Годунова, сохраняющей аппроксимацию на произвольных расчетных сетках [Текст]: техн. отчет / ЦИАМ; рук. Н.И. Тилляева.–

1983. – № 9860. – 46 с. **3. Harten, A.** Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes [Text] / A. Harten, S. Osher // SIAM J. Num. Analysis. – V. 24, No 2. – 1987. – P. 279-309. **4. Zijlema, M.** On the construction of a third-order accurate TVD scheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains [Text] // Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-94-104. – 1994. – 25 p. **5. Jameson, A.** Transonic flow calculations for air-craft [Text] // Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics / F. Brezzi, ed. – Springer Verlag. – 1985. – P. 156-242. **6. Beam, R.M.** An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations [Text] / R.M. Beam, R.F. Warming // Proc. AIAA 3rd Comput. Fluid Dyn. Conf. – Albuquerque, 1977. – P. 645-649. **7. Menter, F.R.** Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications [Text] // AIAA J. – 1994. – V. 32, No 8. – P. 1598-1605. **8. Бахвалов, Н.С.** Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука. – 1973. – 632 с. **9. Yao, J.** Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows [Text] / J. Yao, A. Jameson, J.J. Alonso, F. Liu // 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 10-13, 2000. – Reno, NV. – AIAA Paper. – 2000. – № 00-0882. – 23 p. **10. Hodson, H.P.** Three Dimensional Flow in a Low-Pressure Turbine Cascade at Its Design Condition [Text] / H.P. Hodson, R.G. Dominy // Transactions of the ASME, J. of Turbomachinery. – V. 109, No 2. – 1987. – P. 177-185. – ISSN 0889-504X. **11. Yee, H.C.** Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates [Text] / H.C. Yee, A. Harten // AIAA J. – V. 25, No. 2. – 1985. – P. 234-235. **12. Ершов, С.В.** Развитие комплекса программ расчета трехмерных течений вязкого сжимаемого газа в лопаточных аппаратах турбомашин [Текст] / С.В. Ершов, В.А. Яковлев, А.И. Деревянко, М.Н. Гризун, Д.А. Козырец // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2011. – № 5. – С. 25-32. – ISSN 2078-774X. **13. Ершов, С.В.** Комплекс програм розрахунку тривимірних течій газу в багатовісцевих турбомашинах «FlowER» [Текст] / С.В. Ершов, А.В. Русанов: Свідчення про державну реєстрацію прав автора на твір, ПА № 77. Державне агентство України з авторських та суміжних прав, 19.02.1996. **14. Ершов, С.В.** Численное моделирование тонкой структуры трехмерных течений [Текст] / С.В. Ершов, А.В. Русанов // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. Сб. науч. трудов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – Вып. 2. – С. 55-64.

Поступила в редколлегию 15.01.13

УДК 519.6:533.6

Численное моделирование многомерных сжимаемых течений с помощью метода Ньютона [Текст] / М.Н. Гризун, С.В. Ершов // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХПИ», 2013. – № 13(987). – С. 38-46. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-774X.

Побудовано неявну ітераційну різницеву схему на основі методу Ньютона для багатовимірних рівнянь газодинаміки у формі Нав'є-Стокса. При дискретизації вихідних рівнянь для диференціальних операторів не використовуються методи лінеаризації та факторизації. Апроксимація похідних за часом здійснюється на триточковому шаблоні за допомогою зворотної різницевої формули другого порядку точності, просторові похідні апроксимуються схемами підвищеної точності *TVD* та *ENO*. Виконано чисельне моделювання в'язких тривимірних та нев'язких двовимірних течій. Показано узгодження здобутих результатів із експериментом. Проведено оцінку швидкості збіжності та граничного числа Куранта для неявної ітераційної схеми та схеми Біма-Уормінга.

Ключові слова: рівняння Нав'є-Стокса, неявна ітераційна схема, метод Ньютона, *TVD*, *ENO*, порядок апроксимації.

The implicit iterative difference scheme based on the Newton method was built for multidimensional equations of gas dynamics in Navier-Stokes form. Methods of linearization and factorization are not used for differential operators for discretizing the initial equations. Approximation of time derivatives is made on three-point pattern with second order backward difference formula, spatial derivatives are approximated with high-resolution *TVD* and *ENO* schemes. Numerical modelling of three-dimensional viscous and two-dimensional inviscid flows was made. It was showed an accordance of obtained results with experiment. An evaluation of rate of convergence and limit of Courant number was made for implicit iterative scheme and Beam-Warming scheme.

Keywords: Navier-Stokes equations, implicit iterative scheme, Newton method, *TVD*, *ENO*, approximation order.