УДК 17.27

И.С. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ», Харьков

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Розглянуто систему алгебраїчних рівнянь другого порядку, що виникає в теорії невід'ємних тригонометричних многочленів. Подані умови збіжності деяких лінійних функцій від розбіжних ітерацій метода Ньютона рішення цієї системи...

The system of the algebraic equations of the second order, arising in the theory of nonnegative trigonometrical polynominals is considered. Conditions of convergence of some linear functions from iterations of Newtons method of the decision of this system are given.

1.Введение. Существуют различные причины интереса к проблеме конструирования и изучения свойств неотрицательных тригонометрических многочленов. Среди них поведение средних Чезаро, явление Гиббса для рядов Фурье , теория аппроксимации, унивалентные функции и многочлены, положительные суммы многочленов Якоби, ортогональные многочлены в единичном круге, области, свободные от нулей дзета – функции Римана и т.д.. Фейер и Рисс в 1915г. (6) доказали, что имеет место следующее представление неотрицательных тригонометрических многочленов: Для каждого неотрицательного тригонометрического многочлена

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta \right) \tag{1}$$

существует алгебраический многочлен $R(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k z^k$ степени n такой, что $T(\theta) = \left| R(z) \right|^2$, $z = e^{i\theta}$. Обратно, для каждого алгебраического многочлена $R(z)$ степени n многочлен $T(\theta) = \left| R\left(e^{i\theta}\right) \right|^2$ является неотрицательным тригонометрическим многочленом. Сеге в 1926г. (6) заметил, что в представлении Фейера – Рисса неотрицательного многочлена по косинусам параметры c_k могут быть выбраны вещественными. Точнее, справедлива следующая теорема. Пусть $C_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$ – косинус – многочлен порядка n, неотрицательный для каждого действительного θ. Тогда _существует алгебраический многочлен $R(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k z^k$ с действительными коэффициентами степени n такой, что $C_n(\theta) = \left| R(z) \right|^2$, $z = e^{i\theta}$. Отсюда следует, что косинус – многочлен $C_n(\theta)$ неотрицателен тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа c_k $k = 0,1,...,n$, такие, что

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} c_i^2 = a_0 \\ \sum_{i=0}^{n} (c_{i-k} + c_{i+k}) c_i = a_k \quad (1 \le k \le n) \end{cases} \tag{2}$$

2. Постановка задачи. Необходимые и достаточные условия разрешимости системы (2) и явный вид решений можно выписать только для начальных значений $n \le 2$, поэтому представляют интерес, например, итерационные методы ее решения. Приближённому решению систем алгебраических уравнений вида (2) $F(\vec{x}) = \vec{\gamma}$ посвящена обширная литература [1,гл.20],[2,гл.8]. В частности, при использовании метода Ньютона рассматриваются итерации $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - [F'(\vec{x}_n)]^{-1} F(\vec{x}_n)$. Если оператор $T = E - [F']^{-1} F$ в окрестности начального приближения $\vec{x}_0$ является сжимающим или выпуклым, то эти итерации быстро сходятся. Однако нахождение такого начального приближения для конкретного оператора F весьма сложно [3. с.156]. Положение может упростится, если рассматривать слабую сходимость итераций $(\vec{x}_n)$. Пусть $F(\vec{a}) = \vec{\gamma}$ - система (1), записанная в векторной форме, тогда итерации метода Ньютона определяются соотношениями

$$F(\vec{a} + \vec{h}) \approx F(\vec{a}) + F'(\vec{a})\vec{h} = \vec{\gamma}, \quad \vec{h} = [F'(\vec{a})]^{-1}(\vec{\gamma} - F(\vec{a})) \tag{3}$$

Так как отображение F не является выпуклым, обычные теоремы выпуклого анализа о сходимости ньютоновых итераций [1, §20] здесь неприменимы. Однако при определенных условиях несложно доказать сходимость двух линейных форм от итераций (3).

3.Решение задачи.

Систему (2) $n+1$ алгебраических уравнений второй степени с $n+1$ неизвестными, удобно записать в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i^2 = \gamma_0 \\ \sum_{i=0}^{n} (a_{i-k} + a_{i+k}) a_i = \gamma_k \quad (1 \le k \le n) \end{cases}, \tag{4}$$

считая, что неизвестные $a_i = 0$ при $i < 0$ и $i > n$.
Заметим, что если $\vec{a} = \left(a_0, a_1, ..., a_n\right)$ – решение системы (4), то

$$\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m} a_i\right)^2 = \sum_{\text{ш}=0}^{m} \gamma_i, \quad \left(\sum_{\text{ш}=0}^{m} (-1)^i a_i\right)^2 = \sum_{\text{ш}=0}^{m} (-1)^i \gamma_i .$$

Поэтому для разрешимости системы (4) необходимо выполнение условий

$$\sum_{\text{ш}=0}^{m} \gamma_i \geq 0, \quad \sum_{\text{ш}=0}^{m} (-1)^i \gamma_i \geq 0 . \tag{5}$$

Обозначим в этом случае

$$s_0 = \left(\sum_{\text{ш}=0}^{m} \gamma_i\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_1 = \left(\sum_{\text{ш}=0}^{m} (-1)^i \gamma_i\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = \frac{s_0 + s_1}{2}, \quad \nu = \frac{s_0 - s_1}{2} .$$

Справедливы следующие утверждения. Пусть $\vec{a}^{(m)} = \left(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, ..., a_n^{(m)}\right)$ - решение системы (4), построенное на m - том шаге итераций (3), и

$$s_0^{(m)} = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(m)} \quad s_1^{(m)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i^{(m)}$$

Теорема 1. Если $\sum_{i=0}^{n} \gamma_i > 0$, и $s_0^{(0)} > 0$, то $s_0^{(m)} \to s_0 \quad (m > 0)$ монотонно убывая; если же $s_0^{(0)} < 0$, то $s_0^{(m)} \to -s_0 \quad (m > 0)$ монотонно возростая. При этом $s_0^{(m)}$ сходится к s_0 квадратично.

Теорема 1а. Если $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \gamma_i > 0$ и $s_1^{(0)} > 0$, то $s_1^{(m)} \to s_1 \quad (m > 0)$ монотонно убывая; если же $s_1^{(0)} < 0$, то $s_1^{(m)} \to -s_1 \quad (m > 0)$ монотонно возростая. При этом $s_1^{(m)}$ сходится к s_1 квадратично.

В то же время, основные итерации $\vec{a}^{(m)}$ могут, конечно, расходиться. Доказательство состоит из последовательности параллельно доказываемых лемм.

Лемма 1.

$$F'_{0,l}\left(\vec{a}\right)=2a_l,\quad F'_{k,l}\left(\vec{a}\right)=2\left(a_{l-k}+a_{l+k}\right),\quad \left(1\le k\le n, 0\le l\le n\right).$$

Пусть $\vec{V}\left(v_0, v_1,...,v_n\right)$ - вектор невязок для системы (1) в точке $\vec{a}$

$$v_0=\gamma_0-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\quad v_k=\gamma_k-\sum_{i=0}^{n}\left(a_{i-k}+a_{i+k}\right)a_i\quad \left(1\le k\le n\right).$$

Тогда по лемме 1 система линейных уравнений (3) для определения поправки $\vec{h}\left(h_0, h_1,...,h_n\right)$ имеет вид

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{i=0}^{n}a_ih_i=v_0, \\ 2\sum\limits_{i=0}^{n}\left(a_{i-k}+a_{i+k}\right)h_i=v_k\quad \left(1\le k\le n\right). \end{cases}$$

Лемма 2.

$$2\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m}a_i\right)\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m}h_i\right)=\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m}v_i\right).$$

Лемма 2а.

$$2\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m}\left(-1\right)^i a_i\right)\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m}\left(-1\right)^i h_i\right)=\left(\sum_{\text{ш}=0}^{m}\left(-1\right)^i v_i\right).$$

Докажем, для определенности, лемму 2а.

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k v_k\right)=2\left(\sum_{i=0}^{n}a_ih_i+\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k\sum_{i=0}^{n}\left(a_{i-k}+a_{i+k}\right)h_i\right)=$$

$$=2\sum_{i=0}^{n}h_i\left(a_i+\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k\left(a_{i-k}+a_{i+k}\right)\right)=2\left(\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i h_i\right).$$

Лемма 3.

$$\sum_{k=0}^{n}v_k=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k-\left(\sum_{i=0}^{n}a_i^{(m)}\right)^2.$$

Лемма 3а.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k v_k=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\gamma_k-\left(\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i a_i^{(m)}\right)^2.$$

Докажем, для определенности, лемму 3а.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{i=0}^{n}(a_{i-k} + a_{i+k})a_i =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k - \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (a_{i-k} + a_{i+k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k - \sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k - \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^m\right)^2 .$$

Лемма 4.

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^{(m+1)}\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n} \gamma_i .$$

Лемма 4а.

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m+1)}\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \gamma_i .$$

Докажем, для определенности, лемму 4а

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m+1)}\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(a_i^{(m)} + h_i\right)\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m)}\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i\right)^2$$

$$+2\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i\right) == [\text{лемма}2a] = \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m)}\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i\right)^2$$

$$+\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i v_i\right) = [\text{лемма}3a] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \gamma_i + \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \gamma_i .$$

Лемма 5. Если $s_0^{(0)} > 0$, то $s_0^{(m)} \to s_0$ монотонно убывая $(m > 0)$; если же $s_0^{(0)} < 0$, то $s_0^{(m)} \to s_0$ монотонно возрастая $(m > 0)$.

Лемма 5а. Если $s_1^{(0)} > 0$, то $s_1^{(m)} \to s_1$ монотонно убывая $(m > 0)$; если же $s_1^{(0)} < 0$, то $s_1^{(m)} \to s_1$ монотонно возрастая $(m > 0)$..

Докажем, для определенности, лемму 5а. Имеем

$$s_1^{(m)} - s_1^{(m+1)} = -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i =$$

$$= -\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k - \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m)}\right)^2}{2\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m)}} = \frac{s_1^{(m)2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k}{2s_1^{(m)}} , \qquad (6),$$

откуда $2s_1^{(m)}s_1^{(m+1)} = s_1^{(m)2} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k \geq 0$ в силу предположенной неотрицательности $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k$. Следовательно, $s_1^{(m)}$ сохраняет знак. Поэтому из леммы 4а и (4) вытекает, что при $s_1^{(0)} > 0$ $s_1^{(m)} \to s_1{}'$ монотонно возрасая $(m > 0)$. Переходя в (5) к пределу получаем $s_1^2 = s_1{}'^2$, откуда из $s' \geq 0$ следует $s_1 = s'$. Случай $s_1^{(0)} < 0$ рассматривается аналогично.

Лемма 6. $s_0^{(m)}$ сходится к s_0 квадратично. Лемма 6а. $s_1^{(m)}$ сходится к s_1 квадратично. Докажем, для определенности, лемму 6а. Имеем из доказательства леммы 4а

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m+1)}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \gamma_k + \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i\right)^2,$$

откуда в силу леммы 2а

$$2\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i^{(m+1)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i^{(m+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k^{(m+1)} = \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i^{(m)}\right)^2,$$

что и означает квадратичную сходимость $s_1^{(m)}$. Теоремы 1 и 1а полностью доказаны.

Выводы. В работе рассмотрена линейные функции $s_0^{(m)}, s_1^{(m)}$ от итераций $(\vec{x}_n)$ метода Ньютона решения системы (1). Даны необходимые и достаточные условия их сходимости (3), , которые удобны при проверке.

Список литературы: **1.** *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика.– М.Мир, 1969, 447с. **2.** *Бабенко К.И.* Основы численного анализа.–М.Физматгиз, 1986,–741с. **3.** *Магарип-Иляев Г.Г, Тихомиров В.М.* Метод Ньютона, дифференциальные уравнения и принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума, Труды МиАН 2008г., т.262, с. 156–177. **4.** *Зигмунд А*. Тригонометрические ряды, т.2.–М.Мир,1965.–615с. **5.** *Г.Полиа, Г.Сеге* Задачи и теоремы из анализа, ч.2.– М.: ГИТТИ, 1956.–432с. **6.** *Dimitar K. Dimitrov*, Extremal Positive Trigonometric Polynomials, Approximation theory, A volume dedicated to Blagovest Sendov 2002, p. 1-24.

Поступила в редколлегию 28.09.2010