

В.А. ВАНИН, д-р. техн. наук, ИПМаш им. А.М.Подгорного НАНУ, Харьков
А.В. ГОЛОВЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, НАУ им. Н.Е.Жуковского, Харьков
Е.В. САМОТОЙ, асп., ИПМаш им. А.М.Подгорного НАНУ, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Запропоновані алгоритми побудови різницевих схем підвищеного порядку слабкої апроксимації на основі їх інтегральних представлень. Чисельно досліджуються порядки класичної і слабкої збіжності різницевого розв'язку для нелінійного скалярного закону збереження і одновимірної нестационарної системи рівнянь газової динаміки.

The algorithms of construction of difference networks of the heightened order of gentle approximating are tendered on the basis of their integral representation. The orders of classic and gentle convergence of the incremental solution for a non-linear scalar conservation law and one-dimensional non-steady set of equations of gas dynamics numerically are investigated.

1. Введение и постановка задачи. Нелинейные нестационарные системы уравнений в частных производных гиперболического типа, возникают при исследовании различных физических процессов и отражают характерные для них фундаментальные физические законы сохранения. Численное их исследование приводит к необходимости существенно модифицировать известные классические численные методы и разрабатывать новые, ориентированные на получение разрывных решений таких систем. Построения разностных схем повышенного порядка аппроксимации для них происходило, в основном, на основе понятия классической аппроксимации. Для определения ее порядка используется разложение в ряды Тейлора, справедливое в областях достаточной гладкости решений. Принималось, что разрывные решения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям в этих областях, а на разрывах – соотношениям, следующим из интегральных уравнений, определяющих слабое решение. Известные эквивалентные формы записи таких уравнений приведены в [1]. В вычислительном эксперименте [2] выяснилось, что определением слабого решения в нестационарных задачах необходимо пользоваться и в той части расчетной области, где «побывала» подвижная ударная волна. Некоторые результаты анализа особенностей определений классической и слабой аппроксимации разностных схем и их конструктивные реализации для нелинейного уравнения переноса приведены в [3-11].

Для построения разностных схем с повышенным порядком слабой аппроксимации предлагаются алгоритмы, использующие следствия исходной системы законов сохранения, записанной в интегральной форме. Такой подход дал положительные результаты при теоретическом рассмотрении извест-

ных разностных схем и сравнении порядков их классической и слабой аппроксимации [3-11]. Предлагаемое развитие методов построения разностных схем представляет собой обобщение метода дифференциального представления разностных схем на не дифференцируемые функции с использованием интегральных представлений.

2. Классическая и слабая аппроксимация разностных схем. Рассмотрим построение разностной схемы повышенного порядка слабой аппроксимации для задачи

$$D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Слабое решение этой задачи находится из соотношения

$$I_{11}(v, g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dx dt = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где $\Omega = \text{sup } g$, $g \in C^\infty(D)$.

Пусть разностная схема k -того порядка классической аппроксимации для (1) имеет вид

$$\Lambda_h(v_h) = 0. \quad (3)$$

Классическая аппроксимация на решениях (1) определяется из соотношения

$$\Lambda_h(u) = O(h^k). \quad (4)$$

Определение 1: Слабая аппроксимация разностного оператора Λ_h k -того порядка на решениях (2), определяется условием

$$\iint_D \Lambda_h[v] g dx dt = O(h^k). \quad (5)$$

Определение 2: Порядок слабой аппроксимации разностного оператора Λ_h на решениях (3) находится из соотношения

$$I_{11}(v_h, g) = \iint_D (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dx dt = O(h^k).$$

Известная схема Лакса-Вендроффа для (1)

$$\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \varphi_2(v_h) = 0, \quad (6)$$

где $\varphi_i(u) = \int (\partial_u f)^i du$, на гладких решениях (1) имеет второй порядок классической аппроксимации по (4)

$$\Lambda_h(u) = O(h^2),$$

и первый порядок слабой аппроксимации (5) на негладких решениях удовлетворяющих (2)

$$\iint_D \Lambda_h[v] g dx dt = O(h).$$

Изменим в схеме (6) разностный оператор и запишем разностную схему в виде [10]

$$\begin{aligned}
S\Lambda_h(v_h) &= \frac{\delta_t^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(v_h) + \\
&+ \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(v_h) - v_h) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Легко проверить, что схема (7) имеет второй порядок классической аппроксимации на решениях (1) (с использованием дифференциальных следствий)

$$S\Lambda_h(u) = O(h^2)$$

и такой же порядок слабой аппроксимации на решениях (2) (с использованием интегральных следствий)

$$\iint_D S\Lambda_h(v)g(x,t)dxdt = O(h^2)$$

Однако чтобы учесть эффекты численного «размазывания» разностного решения необходимо проверять слабую аппроксимацию разностной схемы на ее собственных решениях (9) по соотношению (6). Для этого рассмотрим оценку порядка слабой аппроксимации для указанной разностной схемы по определению 2

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_D S\Lambda_h(v_h)g(x,t)dxdt = \\
&- \left(\iint_D (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dxdt - \frac{\tau}{2} \iint_D (v_h \partial_t^2 g + f(v_h) \partial_t \partial_x g) dxdt + \right. \\
&+ \frac{\tau}{2} \iint_D (v_h \partial_t \partial_x g + f(v_h) \partial_x^2 g) dxdt + \frac{h^2}{3!} \iint_D \left(\frac{\tau^2}{h^2} v_h \partial_t^3 g + f(v_h) \partial_x^3 g \right) dxdt + \\
&+ \frac{h^3}{12} \iint_D \left(-\frac{\tau^3}{2h^3} v_h \partial_t^4 g + \frac{\tau}{2h} f(v_h) \partial_x^4 g - \frac{\tau}{h} [f(v_h) - v_h] \partial_t \partial_x^3 g \right) dxdt - \\
&\left. - \frac{h^3}{12} \iint_D \left(\frac{\tau^3}{h^3} [f(v_h) - v_h] \partial_t^3 \partial_x g \right) dxdt \right) + \dots
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученное выражение (8) назовем **интегральным представлением разностной схемы** (7) на ее решениях. Ограничивая число слагаемых в интегральном представлении будем получать интегральные приближения различных порядков. Так, обозначив через $I_{11}(v_h, g) = \left(\iint_D (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dxdt \right)$, запишем (8) в виде

$$I_{11}(v_h, g) = h(\theta_{21} I_{21}(v_h, g) + \theta_{22} I_{22}(v_h, g)) + h^2 I_3(v_h, g) + O(h^3).$$

Учитывая, что $I_{21}(v_h, g) = I_{11}(v_h, \partial_x g)$ и $I_{22}(v_h, g) = I_{11}(v_h, \partial_t g)$ имеем

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

Такой процесс последовательного исключения слагаемых в интегральном представлении разностной схемы аналогичен построению Γ - и Π -форм диф-

ференциальных представлений. Непосредственное преобразование дифференциального приближения в интегральную форму приводит к соотношению отличному от интегрального представления для нелинейных задач.

3. Результаты численных исследований. Часто, точное разрывное решение (1) заранее неизвестно. В этом случае для приближенного определения порядка слабой сходимости применяют правило Рунге, выполняя экспериментальную проверку скорости сходимости первых интегралов от получаемого разностного решения, взятых по различным областям, содержащим особенности точного решения.

Ниже приведены результаты анализа расчета по схеме «крест» для (1) ($f(u) = u^2 / 2$) с начальным распределением в виде $u(x, 0) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(x/2)$.

Распределение порядков классической и слабой сходимости приведены на Рис.1, Рис.2.

Из практически одинакового распределения порядков локальной и сильной сходимости подтверждается экспериментально обнаруженный факт [2] наличия разной погрешности у инвариантов проходящих через ударную волну и приходящих на нее. В рассмотренной одномерной задаче присутствует только приходящий на разрыв инвариант.

Численное исследование распада произвольного разрыва на неоднородном фоне, заданным соотношением

$$p(x) = r(x)^k, \quad r(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(-\frac{\pi}{2} + 10x\right), \quad u(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(-\frac{\pi}{2} + 50x\right),$$

проведено для одномерных нестационарных уравнений газовой динамики на интервале [0,1]. В расчетах использовалась монотонная разностная схема второго порядка классической и первого слабой точности. Монотонизация схемы осуществлялась на основе реконструкции предраспадных величин с использованием L-функций [13] в интерполяционных полиномах Ньютона

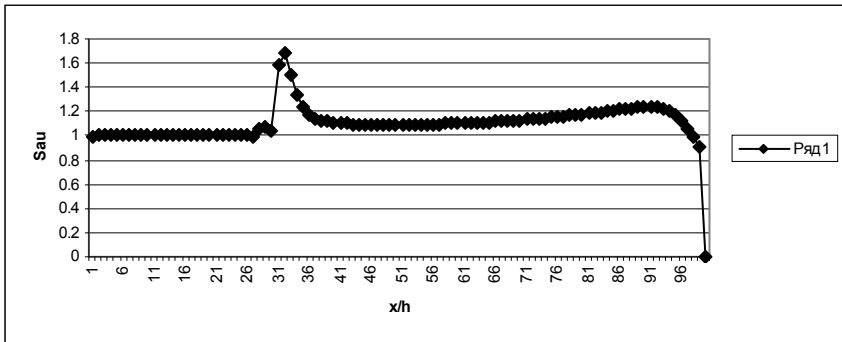


Рисунок 1 – Распределение порядка слабой сходимости.

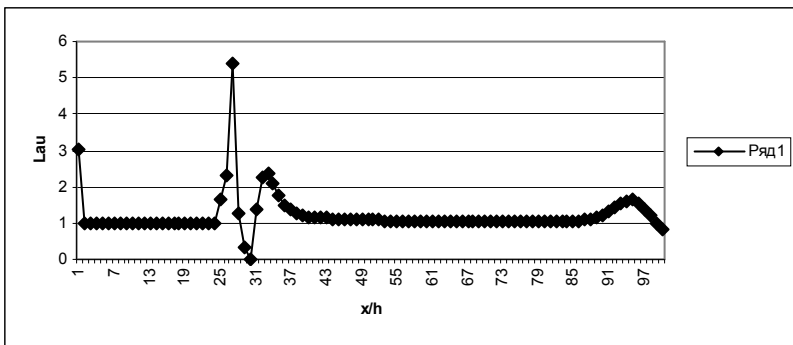


Рисунок 2 – Распределение порядка локальной (классической) сходимости.

Анализируемое распределение газодинамических параметров в некоторый момент времени представлено на Рис.3 в виде распространяющейся по неоднородному фону ударной волны. Распределение порядков локальной и слабой сходимости для давления плотности и скорости приведены на Рис.4-Рис.9. Видно, что порядок слабой сходимости сохраняется в окрестности разрыва и за ним, а порядок классической сходимости не определяется за разрывом.

Аппроксимация «мягкого» граничного условия порождает погрешность первого порядка и нерегулярное поведение порядка локальной сходимости на концах интервала.

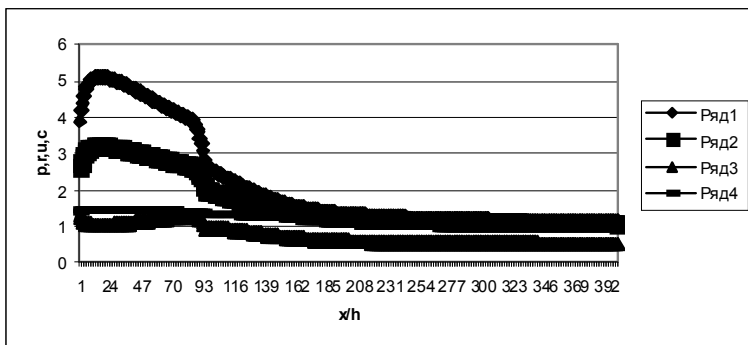


Рисунок 3 – Анализируемое распределение газодинамических параметров.

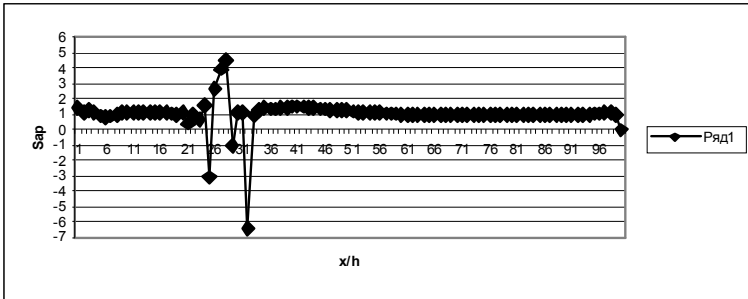


Рисунок 4 – Распределение порядка слабой сходимости для давления.

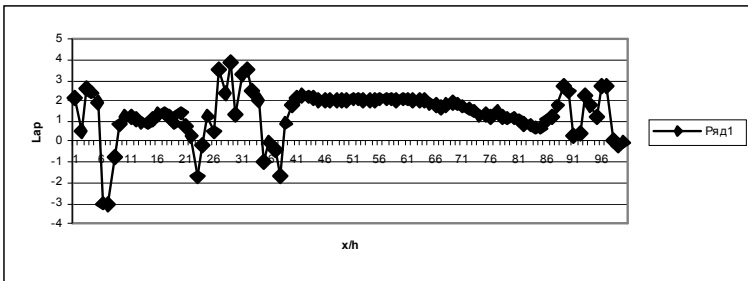


Рисунок 5 – Распределение порядка локальной сходимости для давления.

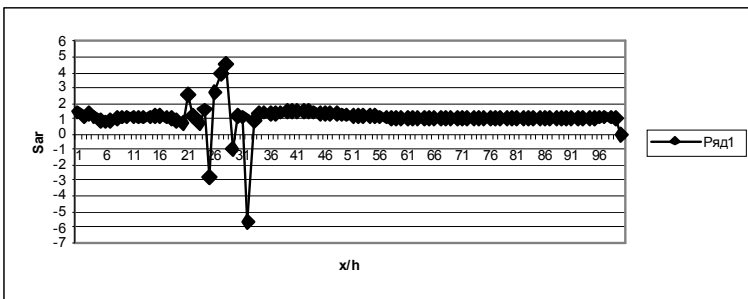


Рисунок 6 – Распределение порядка слабой сходимости для плотности.

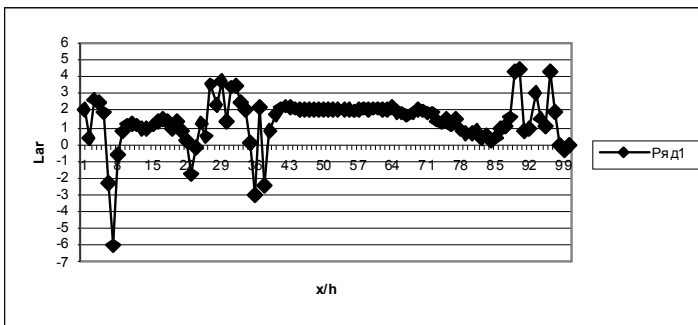


Рисунок 7 – Распределение порядка классической сходимости для плотности.

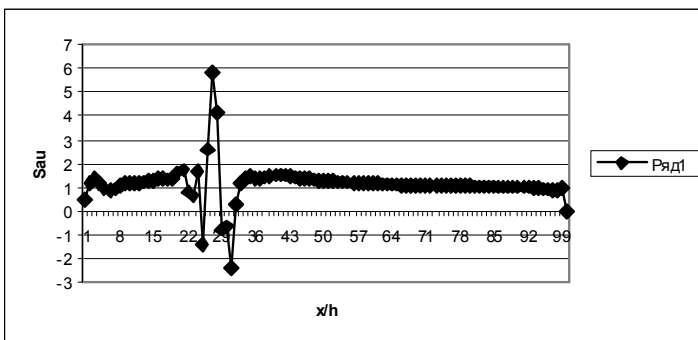


Рисунок 8 – Распределение порядка слабой сходимости для скорости.

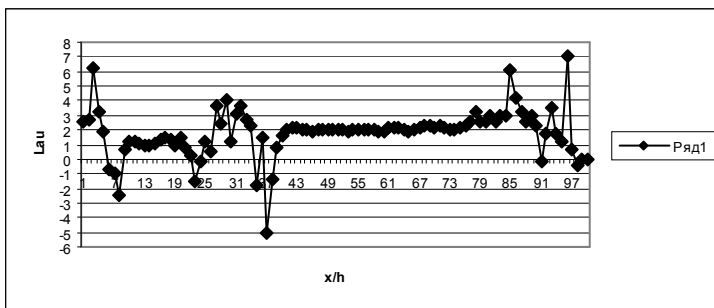


Рисунок 9 – Распределение порядка классической сходимости для скорости.

4. Выводы. Интегральное представление разностной схемы, следуя аналогии дифференциального представления для гладких решений, занимает промежуточное по информативности положение между исходной интегральной математической моделью процесса и аппроксимирующей слабо ее разностной схемой. Использование свойств интегрального представления и интегральных приближений разностных схем на негладких решениях разностного уравнения позволит более полно исследовать разрывные решения.

Список литературы: 1. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит.– 2003.– 416с. 2. *Русанов В.В., Безменов И.В., Нажесткина Э.И.* Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений // Численное моделирование в аэрогидродинамике.–М.:Наука.– 1986.– С.174 – 186. 3.*Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики// *Мат.сб.*–1959.–т.47(89), №3.–С.271–306. 4. *Годунов С.К.* Воспоминания о разностных схемах. Доклад на Международном симпозиуме «Метод Годунова в газовой динамике», Мичиганский университет (США), май, 1997. – Новосибирск: Науч. книга.– 1997.– 40с. 5. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws// *Communs Pure and Appl. Math.* – 1960. – v.13. – P.217 – 237. 6. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений.–М.: Физматлит, 2001.– 608с. 7. *Остапенко В.В.* О повышении порядка слабой аппроксимации законов сохранения на разрывных решениях // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.*–1996.–т.36, №10.–С. 146–157. 8. *Остапенко В.В.* О слабой сходимости на разрывных решениях TVD- схемы Хартена второго порядка аппроксимации // *Вычислительные технологии.*– 1997.–т.2,№5.–С.57-65. 9. *Остапенко В.В.* О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн// *Журн. вычислит. математики и мат. физики.*–2000.–т.40, №12.–С. 1857–1874. 10. *Ванин В.А.* Вычислительные алгоритмы повышенного порядка слабой аппроксимации для задач газовой динамики // *Вісті Академії інженерних наук України, машинобудування та прогресивні технології.* –2007.–№3(33).–С.185–191. 11. *Крупа В.Г.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для гиперболических уравнений // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.*–1998.–т.38, №1.–С. 85–98. 12. *Русанов В.В., Безменов И.В., Нажесткина Э.И.* Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений // Численное моделирование в аэрогидродинамике.–М.:Наука.– 1986.– С.174 – 186. 13. *Ванин В.А.* Вычислительные схемы с L-функциями для задач газовой динамики // *Проблемы машиностроения.*-2004.-т.7,№4.-С.36-42

Поступила в редколлегию 07.09.2010