

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ», Харьков  
**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспирант, НТУ «ХПИ», Харьков

## ИЗОМОРФИЗМ ГРУПП ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОГО СТЕРЖНЯ

Проаналізовано прикладні та гносеологічні аспекти симетрії рівнянь, що моделюють повздовжні і поперечні коливання гвинтового стрижня. Досліджені форми гармонічних коливань, що використовуються при синтезі гвинтових хвиль трансляції. Показано, що у хвиль середнього частотного діапазону відношення кручення і кривизни пропорційно частоті, і це є передумовою їх квантування. Сформульовані обмеження амплітуд коливань виходячи із умов міцності стрижня.

The applied and the gynecological aspect of the symmetry of the equitation are modeling the longitudinal and the cross – section oscillations of the screw rod are analyzed. The forms of the harmonic oscillations used by the synthesis of the spiral repeater waves are examined. It is shown that the waves of the middle frequency range have an equal degree of the torsion and the curvature towards the frequency and that is the basis of their quantization. The restrictions of the oscillations amplitude caused by the conditions of the rod's strength are defined

**Введение и постановка задачи.** Статья продолжает цикл публикаций [1-3], в которых рассматриваются новые аспекты решения актуальной фундаментальной и прикладной проблемы генерирования винтовых волн трансляции (фононов, рис. 1), распространяющихся по активной вибрирующей среде, наделённой упругими и пластическими свойствами. Но результаты статьи имеют и гносеологическое значение. Уже давно не секрет, что помимо материального в нашем мире существует информационное поле; оно использует энергию материального поля и, взамен, отдаёт ему информацию. Считается, что между этими полями существует неразрывная взаимодополняющая связь, и главный философский вопрос – «Что первично, материя или сознание?» – является некорректным.

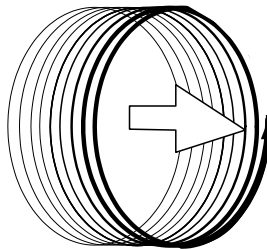


Рисунок 1 – Фонон, аналог фотона.

Современная наука исходит из того, что сознание способно понять и объяснить мир. Следовательно, информационное поле должно быть во многом похоже на материальное (математики используют термин **изоморфно**). На возможность и природу этого изоморфизма указывал *Анри Пуанкаре* [4]. Он считал, что пусть природа и не боится аналитических трудностей, но для всех проблем умеет находить простые решения. Известные уравнения колебаний сплошной упругой среды (смотри учебник [5] и его обозначения):

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div} \vec{u} - G \cdot \text{rot rot} \vec{u} + \vec{F} \quad (1)$$

представляют эту среду как бесконечно делимую и описывают поле линейных смещений  $\vec{u}(M, t)$  её точек  $M$  в момент времени  $t$ . Но если считать эту среду зернистой (например, состоящей из кристаллов малого, но конечного размера), то наряду с перемещениями нужно учитывать угловые колебания зёрен. В результате, наряду с полем  $\vec{u}(M, t)$  возникает поле угловых смещений  $\vec{\alpha}(M, t)$ , и эти поля, пусть и слабо, взаимодействуют друг с другом. Пуанкаре считал, что если поле  $\vec{u}(M, t)$  отвечает эффектам материального мира, то поле  $\vec{\alpha}(M, t)$  – нашим ощущениям, то есть, говоря языком современной науки, является **информационным полем**.

Далее в статье мы приведём уравнения этих полей, но для простейшей (одномерной) модели упругой среды, описывающей колебания цилиндрического тонкого винтового стержня (рис.2), навитого с малым углом подъёма  $\delta$  винтовой линии. Мы изучим характер взаимосвязи полей, после чего, используя ту же модель, исследуем моногармонические колебания стержня, что ляжет в основу дальнейшей работы по синтезу винтовых фононов.

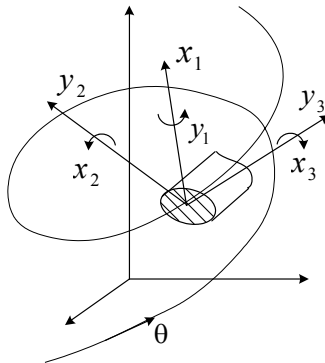


Рисунок 2 – Координаты поперечного сечения.

**Матричные уравнения стержня.** Для 6-ти координат сечения  $\theta$  винтового стержня (трёх перемещений и трёх углов поворота) примем обозначения рис.2, и объединим эти координаты, скорости их изменения и отвечающие им упругие силы  $Qx_1, Qx_2, \dots, Qx_3$  в векторы – столбцы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = Vx = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{Y} = Vy = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}, \quad Qx = \begin{bmatrix} Qx_1 \\ Qx_2 \\ Qx_3 \end{bmatrix}, \quad Qy = \begin{bmatrix} Qy_1 \\ Qy_2 \\ Qy_3 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, составим из 6-ти инерционных коэффициентов сечения  $mx_1, mx_2, \dots, my_3$  (это масса или момент инерции), а также из 6-ти коэффициентов упругой податливости сечения  $cx_1, cx_2, \dots, cy_3$  диагональные матрицы третьего порядка  $Mx, My, Cx, Cy$ . Тогда полученные в работе [1] векторные уравнения связанных колебаний стержня:

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{Q} + \bar{p} \times \bar{\omega}; & \rho J \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{M} + (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \times \bar{Q} + \bar{j} \times \bar{\omega} \\ cQ \cdot \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{v} + (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \times \bar{\omega}; & cM \cdot \frac{\partial \bar{M}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{\omega} \end{aligned} \right\}$$

после перехода к безразмерным физическим величинам и допустимого для целей данного исследования упрощения примут следующий матричный вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Delta \\ \Delta & -B^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & \Delta^T \\ \Delta^T & -B \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -tg\delta - cx_3 \cdot Qx_3 & 0 \\ tg\delta + cx_3 \cdot Qx_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$

матрицы линейной и нелинейной связи координат. Для стержня, изготовленного из проволоки круглого поперечного сечения, диагональные элементы матриц  $Mx, \dots, Cy$  вычисляются по формулам  $mx_1, my_2, my_3, cx_2, cy_1 = 1,$

$$mx_2, my_1, cy_3 = \frac{1}{4z^2}, cx_3 = 1 + \mu, mx_3 = \frac{1}{2z^2}, cx_1, cy_2 = \frac{1 + \mu}{2z^2},$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $z$  – индекс навивки стержня (пружины).

Если принять  $\Delta = 0$ , то система (2) распадается на независимые системы

$$\begin{cases} Mx \cdot \partial Vx / \partial t = \partial Qx / \partial \theta - B \cdot Qx \\ Cx \cdot \partial Qx / \partial t = \partial Vx / \partial \theta + B^T \cdot Qx \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} My \cdot \partial Vy / \partial t = \partial Qy / \partial \theta + B^T \cdot Qy \\ Cy \cdot \partial Qy / \partial t = \partial Vy / \partial \theta - B \cdot Qy \end{cases}.$$

Согласно терминологии, используемой при динамическом анализе винтовых цилиндрических стержней (пружин), первая система описывает продольные, а вторая – поперечные колебания; при этом система (2) описывала связанные колебания стержня.

**Симметрия уравнений и изоморфизм колебаний.** Полученный выше результат матричной факторизации уравнений наглядно демонстрирует поразительную симметрию, найденную и реализованную на практике самой природой. Каждое из независимых колебаний объединяет группу из трёх координат – два смещения и один угол или одно смещение и два угла. Если мы сравним это с тем, что предсказывал Пуанкаре, то в количественном отношении получим совпадение, но по составу групп есть различие (у него смещения и углы составляли отдельные группы колебаний). Однако это различие с лихвой перекрывается глубиной достигнутого изоморфизма.

Если в уравнениях для продольных колебаний выполнить замены  $Vx \rightarrow Qy, Qx \rightarrow Vy, Mx \rightarrow Cy, Cx \rightarrow My$ ,

то есть поменять местами скорости и упругие силы, то мы получим уравнение для группы поперечных колебаний. Кроме того стоит заметить, что для винтового стержня, имеющего малую относительную кривизну (то есть большое значение индекса  $z$ ), выполняются приближённые равенства

$$Mx \approx Cy, Cx \approx My,$$

и это обстоятельство дополнительно усиливает отмеченное сходство.

Получается, что «мир» поперечных колебаний стержня является зеркальным отражением «мира» продольных колебаний, а при коэффициентах связи  $\delta \neq 0$  он становится его зеркальным продолжением.

Поясним, что это означает. Предположим, мы сжимаем цилиндрическую пружину по некоторому периодическому закону и, тем самым, возбуждаем в ней интенсивные продольные колебания витков, обладающие определённой энергией и дискретным спектром частот. Коэффициент связи  $\delta$  мал, но он не равен 0, и поэтому малая часть этой энергии будет передана в другую группу и возбудит там слабые поперечные колебания, являющиеся продолжением (и «отражением») продольных. Обратный поток энергии в силу

малости  $\delta$  – это уже бесконечно малая величина второго порядка, и им, как правило, можно пренебречь. Но из этого правила существует исключение. Предположим, что одна из частот возбужденных поперечных колебаний оказывается резонансной. Тогда обратный («информационный») поток энергии усиливается настолько, что становится определяющим и для продольных колебаний.

Таким образом, уравнения (2) являются простейшей математической моделью, которая предоставляет возможность предметного изучения информационно – энергетического обмена. Как будет выглядеть обобщение уравнений (2) на трёхмерный случай точно не известно. Но главное, на наш взгляд, в этих уравнениях «схвачено» правильно – интенсивный обмен имеет два ключа доступа: с одной стороны – высокая потенциальная энергия, вызывающая значительное искривление пространства, с другой – высокая кинетическая энергия резонансных колебаний.

**Частоты моногармонических колебаний стержня.** Уравнения (2) являются нелинейными, но если в матрице  $\Delta$  пренебречь изменением кручения  $\chi_3 = cx_3 \cdot Qx_3$ , они становятся линейными. Решение линеаризованной системы (2) будем искать в форме простой волны, то есть

$$Vx, Vy, Qx, Qy \sim \exp(i \cdot (\omega \tau + \lambda \theta)) ;$$

если  $\omega$  и  $\lambda$  – вещественные числа, то волна является гармонической и бегущей. Круговую частоту  $\omega$  и круговое волновое число  $\lambda$  связывает так называемое дисперсионное уравнение модели (2),

$$\det \begin{bmatrix} i\omega \cdot Mx & \Theta & i\lambda \cdot I + B & -\Delta \\ \Theta & i\omega \cdot My & -\Delta & i\lambda \cdot I - B^T \\ i\lambda \cdot I + B^T & \Delta & i\omega \cdot Cx & \Theta \\ \Delta & i\lambda \cdot I - B & \Theta & i\omega \cdot Cy \end{bmatrix} = 0,$$

решения которого представлены на рис.3. Корни  $\omega^2$  вычислялись как собст-

венные собственные числа матрицы 6-го порядка  $K = \begin{bmatrix} Mx^{-1}A_{11} & Mx^{-1}A_{12} \\ My^{-1}A_{21} & My^{-1}A_{22} \end{bmatrix}$ ,

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(i\lambda I - Bx) \cdot Cx^{-1} \cdot (i\lambda I - B)^* - \Delta \cdot Cy^{-1} \cdot \Delta, \\ A_{22} &= -(i\lambda I - B)^* \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B) - \Delta \cdot Cx^{-1} \cdot \Delta, \\ A_{12} &= \Delta \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B) + (i\lambda I - B) \cdot Cx^{-1} \cdot \Delta, \quad A_{21} = A_{12}^*, \end{aligned}$$

для чего использовалась стандартная программа диалоговой среды MathCAD.

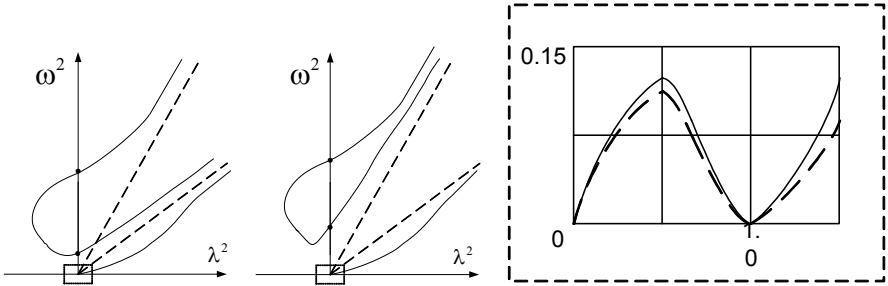


Рисунок 3 – Зависимость частоты  $\omega$  от волнового числа  $\lambda$  для продольных (а) и поперечных (б) колебаний (позиция **в** – нижние ветви для малых частот).

В разрыве между ветвями величина  $\omega^2$  комплексная.

Средним ветвям на этих дисперсионных диаграммах соответствуют смещённые из начала координат наклонные прямые линии

$$\omega^2 = a_1^2 \cdot \lambda^2 + \omega_1^2, \quad \omega^2 = a_2^2 \cdot \lambda^2 + \omega_2^2, \quad (3)$$

где  $a_{1,2}$  – скорости распространения вдоль прямого стержня волн крутильной и продольной деформации,  $a_1/a_2 = 1/\sqrt{2(1+\mu)}$ ;  $\omega_{1,2}$  – круговые частоты соответствующих синфазных колебаний (на синфазной частоте весь стержень колеблется в одной фазе, и, как следствие, отсутствует внутреннее трение).

Равенства (3) являются дисперсионными для уравнений

$$a_{1,2}^{-2} \cdot \partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2 - \omega_{1,2}^2 / a_{1,2}^2; \quad (4)$$

уравнения Клейна – Гордона (4) хорошо известны в квантовой физике (смотри [6]), где они используются для моделирования свободных нерелятивистских частиц (например, электронов, не связанных с ядром атома).

**Формы колебаний для диапазона средних частот.** Проанализировано изменение формы гармонического колебания при увеличении частоты вдоль средних ветвей; эти колебания используются при синтезе фононов. Описанное выше алгебраическое преобразование позволило применить для этого анализа стандартные программы пакета MathCAD нахождения собственных векторов матрицы  $K$  6-го порядка. Оказалось, что для одной ветви при всех частотах наблюдается кручение, а для второй – синфазное радиальное перемещение сменяется несинфазным рысканием (качанием и пропорциональным тангенциальным перемещением).

Показательно распределение энергии по видам деформации, рис.4,5. На графиках используется приведенное волновое число  $\alpha = \tilde{\lambda} = \lambda/(2\pi)$ , значение  $\alpha = 1$  соответствует длине волны, равной длине одного витка стержня.

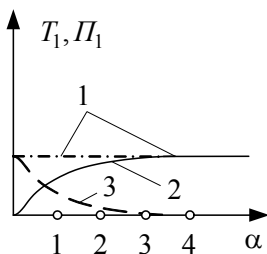


Рисунок 4 – Составляющие энергии «продольной» волны: 1 – вращение; 2, 3 – деформации кручения и изгиба.

Для первой ветви диаграммы плотности кинетической энергии  $T$  и потенциальной энергии  $\Pi$  определяются формулами:

$$T_1 = 0.5(Mx \cdot vx, vx) + 0.5(My \cdot vy, vy) \approx 0.5(Mx \cdot vx, vx),$$

$$\Pi_1 = 0.5(Cx \cdot qx, qx) + 0.5(Cy \cdot qy, qy) \approx 0.5(Cx \cdot qx, qx),$$

для второй ветви – формулами:

$$T_2 = 0.5(Mx \cdot vx, vx) + 0.5(My \cdot vy, vy) \approx 0.5(My \cdot vy, vy),$$

$$\Pi_2 = 0.5(Cx \cdot qx, qx) + 0.5(Cy \cdot qy, qy) \approx 0.5(Cy \cdot qy, qy),$$

где  $vx, vy, qx, qy$  – соответствующие блоки, составленные из компонент собственного вектора, имеющего единичную норму.

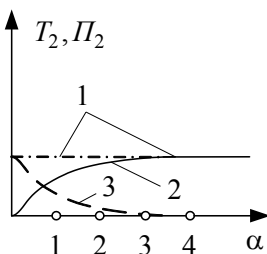


Рисунок 5 – Составляющие энергии «поперечной» волны: 1 – деформация сжатия, 2, 3 – тангенциальное и радиальное смещение.

Оказалось, что для первой ветви выполняются условия  $T_1 + \Pi_1 = const$ , и  $T_1 = \Pi_1$ , причём  $T_1$  – это, в основном, энергия вращения вокруг винтовой оси с угловой скоростью  $\nu x_3$ , а потенциальная энергия  $\Pi_1$  для начальных частот ветви определяется деформацией изгиба  $qx_2$ , а затем её замещает деформация кручения  $qx_3$  (рис. 4).

Для второй ветви диаграммы равенство плотностей энергий  $T_2 = \Pi_2$  и постоянство суммы  $T_2 + \Pi_2$  также сохраняются, но на начальных частотах кинетическая энергия  $T_2$  определяется радиальной скоростью  $\nu y_2$ , а затем её замещает тангенциальная скорость  $\nu y_3$  (рис. 5).

Для дальнейшего важным является следующее обстоятельство. Оказалось, что на первой ветви вместе с угловой скоростью вращения  $\nu x_3$  изменяется в одной фазе упругие силы  $qx_1$ ,  $qx_3$  и скорость продольного смещения  $\nu x_1$ , причём эти четыре компоненты собственного вектора не зависят от длины волны. Остальные две величины отстают на четверть или три четверти периода, принимают малые значения и убывают пропорционально длине волны.

На второй ветви наблюдается аналогичная картина: значения компонентов  $\nu y_1, \nu y_3, qy_1, qy_3$  в области  $\alpha > 2$  стабилизируются, и соответствующие колебания имеют одинаковую фазу, остальные две компоненты смещены на четверть или три четверти периода, но они убывают пропорционально длине волны, а их значения малы.

Данное обстоятельство означает, что:

- указанные четыре компоненты описываются одной гармонической функцией (синусом или косинусом),
- колебания пропорциональны одному из них, **ведущему** (для одной ветви это угловая скорость  $\nu x_3$ , другой – сила  $qy_3$ ), причём коэффициенты пропорциональности не зависят от длины волны.

Для стержня, имеющего круглое поперечное сечение, на первой и второй ветви при условии  $\alpha > 2$  выполняются следующие приближённые равенства:

$$\begin{pmatrix} \nu x_1 \\ \nu x_3 \\ qx_1 \\ qx_3 \end{pmatrix} = \nu x_3 \cdot \begin{pmatrix} (1 + \mu/2) \cdot z^{-2} \\ 1 \\ (2 + \mu) \cdot z^{-1} / \sqrt{2 \cdot (1 + \mu)} \\ z^{-1} / \sqrt{2 \cdot (1 + \mu)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu y_1 \\ \nu y_3 \\ qy_1 \\ qy_3 \end{pmatrix} = qy_3 \cdot \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0.5 \cdot z^{-1} \\ 0.5 \cdot z^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Изгиб и момент изгиба для всех длин волн, а также радиальное смещение и отвечающая ему сила (при волновых числах  $\alpha > 2$ ) для колебаний средних ветвей имеют малую амплитуду, убывающую пропорционально периоду колебаний:

$$\begin{pmatrix} vx_2 \\ qx_2 \end{pmatrix} = -vx_3 \cdot i \cdot \begin{pmatrix} (1 + \mu/2)\sqrt{2(1 + \mu)} \cdot z^{-1} \cdot \lambda^{-1} \\ -\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} vy_2 \\ qy_2 \end{pmatrix} = -qy_3 \cdot i \cdot \begin{pmatrix} z^{-1} \cdot \lambda^{-1} \\ -z^{-2} \cdot \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

В этих и многих других формулах статьи можно увидеть конкретное проявление симметрии, связанной с изоморфизмом групп колебаний.

**Алгебраическая предпосылка квантования.** Важно подчеркнуть, что кривизна  $\chi_2 = cx_2 \cdot qx_2$ , кручение  $\chi_3 = cx_3 \cdot qx_3$  и угловая скорость  $vx_3$  вдоль первой ветви в области  $\alpha > 2$  находятся в следующих отношениях:

$$\chi_3 \div \chi_2 = \omega \div (2 \cdot z), \quad vx_3 \div \chi_2 = \omega, \quad (5)$$

то есть при постоянной проекции  $\chi_2$  вектора кривизны на направление бинормали величины кручения  $\chi_3$  и угловой скорости  $vx_3$  изменяются пропорционально частоте  $\omega$ . В дальнейших публикациях этого цикла будет показано, что условие (5) способно обеспечить квантование амплитуды фона и известную пропорциональность между его энергией и частотой.

Выясним, какое свойство модели «ответственно» за выполнение этого условия. Равенства (5) являются следствием дифференциальных уравнений

$$cx_2 \cdot \partial qx_2 / \partial \tau = \partial vx_2 / \partial \theta + vx_3, \quad cx_3 \cdot \partial qx_3 / \partial \tau = \partial vx_3 / \partial \theta - vx_2, \quad (6)$$

в которых обоснованно пренебрегли влиянием группы поперечных колебаний, и могут быть получены в предположении, что скорость деформации изгиба  $vx_2$  мала, и в этих уравнениях ею можно пренебречь.

Форма этих уравнений и возможность их дополнительного упрощения вытекают из вида матрицы линейной связи координат  $B$ , «зашифрована» в её структуре. В статье [7] на основе общих представлений о симметрии уравнений механических колебаний винтового стержня было показано, что эта матрица отличается от общего случая тем, что элемент  $B_{1,2}$  равен 0. В этом частном случае нормаль после навивки стержня перпендикулярна оси витка. Такое условие для цилиндрической пружины, навитой с постоянным шагом, является естественным, но для конической или другой фасонной пружины может не выполняться. При условии  $B_{1,2} \neq 0$  изменяется вид уравнений (6), и

величина  $vx_2$  не является малой. Но, как показали результаты компьютерного моделирования, пропорции (5) и в этом случае не нарушаются.

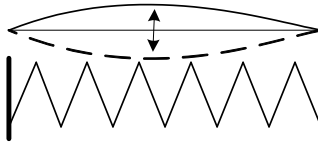


Рисунок 6 – Форма низкочастотной стоячей волны.

**Формы низкочастотных колебаний.** При использовании описанных выше аналитических методов и компьютерных программ были получены и изучены формы моногармонических низкочастотных колебаний для длинной пружины, а также (смотри далее) формы синфазных колебаний. Все эти колебания, априори, способны передать фону (или другой автоколебательной волне) накопленную в них энергию и обеспечить стабильность автоколебаний.

**Низкочастотная стоячая длинная волна** в пружине с числом витков  $i_g \gg 10$  располагается на восходящей части нижней ветви дисперсионного уравнения (рис.3, позиция в, вблизи начала координат), соответствует основной частоте пружины и описывается следующими формулами (рис.6):

$$\begin{aligned} \text{продольная} - (vx, qx) &= Ax \cdot ((1 \ 0 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 1)^T) \cdot \sin(\omega x \cdot t) \cdot \sin(\alpha x \cdot \theta), \\ \text{поперечная} - (vy, qy) &= Ay \cdot ((1 \ 0 \ 1)^T, (1 \ 0 \ 0)^T) \cdot \sin(\omega y \cdot t) \cdot \sin(\alpha y \cdot \theta), \end{aligned}$$

где  $Ax, Ay$  – амплитуды этих волн;  $\omega x, \omega y \approx 0, \alpha x, \alpha y = 1/i_g$  – их круговые частоты и волновые числа. Максимальное значение амплитуды одиночной волны определяется из условия прочности при кручении и изгибе (смотри справочник [8]) и с учётом нормировки сил принимает вид:

$$Ax, Ay \leq 0.005 \cdot z, \tag{9}$$

где коэффициент 0.005 примерно соответствует отношению предельно допустимого напряжения изгиба  $\tau_u$  и модуля упругости  $E$  (для стали).

Аналогичные формы имеют **бегущие низкочастотные волны**, возникающие, например, при перемещении одной из опор пружины:

продольная –  $(vx, qx) = Ax \cdot ((1 \ 0 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 1)^T) \cdot \sin(\omega x \cdot t - \alpha x \cdot \theta)$ ,

поперечная –  $(vy, qy) = Ay \cdot ((1 \ 0 \ 1)^T, (1 \ 0 \ 0)^T) \cdot \sin(\omega y \cdot t - \alpha y \cdot \theta)$ .

Заметим, что если обе опоры движутся в одну сторону, то при интерференции двух бегущих волн скорости складываются, а силы – вычитаются. Поэтому амплитуды этих волн могут быть очень большими, и они не обязаны удовлетворять неравенствам (9). Другая возможность ослабить ограничение (9) заключается в суммировании бегущей волны и результата предварительной деформации. Анализ уравнений (2) показывает, что у винтового стержня существует два типа статической деформации, приводящие к появлению только перерезывающей силы  $qx_1$  (как при работе пружины растяжения – сжатия) или только изгибающего момента  $qy_1$  (как для пружины кручения).

**Низкочастотная стоячая короткая волна** в длинной пружине располагается на нижней ветви характеристического уравнения (рис.3, позиция в, вблизи точки возврата) и описывается следующими формулами:

$$(vx, qx) = Ax \cdot ((-1 \ i \ 1)^T, (0 \ i \ 1)^T) \cdot \exp[i(\omega x \cdot t + \alpha x \cdot \theta)],$$

$$(vy, qy) = Ay \cdot ((0 \ i \ 1)^T, \pm\sqrt{2}(1 \ -i \ -1)^T) \cdot \exp[i(\omega y \cdot t + \alpha y \cdot \theta)],$$

где  $\omega x, \omega y \approx 0$ ,  $\alpha x, \alpha y \approx 1$  – круговые частоты волн и их волновые числа; знаки плюс и минус соответствует восходящей или нисходящей части этой ветви (то есть условиям  $\alpha > 1$  и  $\alpha < 1$ ).

Для энергетической поддержки фононов используются поперечные волны. Ограничение их амплитуды оказывается примерно таким же, как в (9):

$$Ay \leq 0.0035 \cdot z. \quad (10)$$

Однако его можно обойти, если использовать пакет из двух колебаний почти одинаковой частоты. В статье [9] указано на существование в спектре пружины очень близких собственных частот, называемых **кластерами**. В частности, если использовать жёсткое закрепление опорных витков, то:

- кластер возникает между первой и второй основной частотой,
- волновые числа располагаются на нижней ветви дисперсионной диаграммы по обе стороны от числа  $\alpha = 1$ .

Кластер фактически описывает колебания цилиндра, боковая поверхность которого имеет ту же инерционность и жёсткость, что и пружина; эти колебания происходят в двух перпендикулярных осевых сечениях (рис.7). Если число витков и индекс пружины велики, то эти две частоты обязаны мало различаться между собой, что проявляется в расчётах и экспериментах. Поскольку при движении вдоль сечения цилиндра смещение по координате

$y_2$  заменяется смещением по координате  $y_3$ , и наоборот, то амплитуды колебаний модулированы в пределах одного витка.

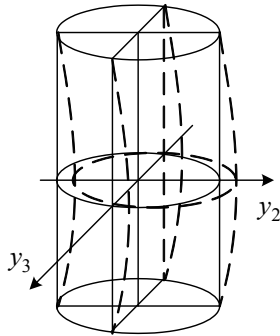


Рисунок 7 – Форма колебания на частотах кластера.

Для длинной пружины расхождение собственных частот в первом кластере наблюдается на уровне шестой значащей цифры или даже менее того. Кроме того, величина этих частот мала, а длины волн очень близки к длине витка. Поэтому в результате интерференции упругие силы становятся пренебрежимо малыми, и для средней части пружины приходим к формуле

$$(v_y, q_y) = Ay \cdot ((0 \ \sin \theta \ \cos \theta)^T, (0 \ 0 \ 0)^T) \cdot \sin(\omega y \cdot t).$$

Колебания кластера, как показывает эта формула, могут быть очень большими по амплитуде, но они имеют недостаток, существенный для стабилизации фононов, – малая длина волны.

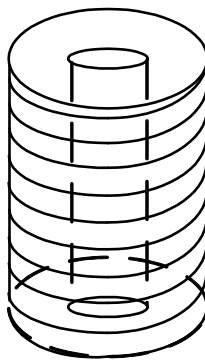


Рисунок 8 – Эквивалентная модель.

**Формы синфазных колебаний.** Если витки пружины сжать до соприкосновения, то получим цилиндрический отрезок трубы (рис.8), имеющий 4-е формы синфазной деформации; эти же деформации соответствуют синфазным колебаниям пружины:

осевое смещение наружной поверхности относительно внутренней; эквивалентно продольным колебаниям на нижней синфазной частоте, участвуют угловая скорость  $v_{x_3}$  кручения стержня и момент изгиба  $qx_2$ ;

осевое сжатие приводит к изменению угла подъёма винтовой канавки; эквивалентно продольным колебаниям верхней синфазной частоты, участвуют скорость изгиба  $v_{x_2}$  и перерезывающая сила  $qx_1$ ;

радиальные колебания трубы эквивалентны поперечным колебаниям пружины на нижней синфазной частоте, участвуют скорость радиального смещения  $v_{y_2}$  и осевая сила  $qy_3$ ;

прокручивание внешней поверхности трубы относительно внутренней приводит к деформации сдвига в направлении нормали; эквивалентно продольным колебаниям на верхней синфазной частоте, участвуют угловая скорость изгиба  $v_{y_1}$  и перерезывающая сила  $qy_2$ .

**Синфазные колебания нижних частот** описываются формулами:

$$\begin{aligned}(vx, qx) &= Ax \cdot ((0 \ 0 \ 1)^T \cos(\omega x \cdot t); (0 \ 1/(2z) \ 0)^T \sin(\omega x \cdot t)), \\ (vy, qy) &= Ay \cdot ((0 \ 1 \ 0)^T \cos(\omega y \cdot t); (0 \ 0 \ -2z)^T \sin(\omega y \cdot t)),\end{aligned}$$

где  $\omega x = 1/\sqrt{mx_3 \cdot cx_2}$ ,  $\omega y = 1/\sqrt{cy_3 \cdot my_2}$  – круговые частоты колебаний.

Амплитуды колебаний лимитируются прочностью стержня при сдвиге (продольная) и сжатии (поперечная волна), что приводит к неравенствам:

$$Ax \leq 0.01 \cdot z^2, \quad Ay \leq 0.02 \cdot z.$$

**Синфазные колебания верхних частот** описываются формулами:

$$\begin{aligned}Vx &= Ax \cdot (0 \ 1 \ 0)^T \cos(\omega x \cdot t); \quad Qx = \frac{Ax}{\sqrt{2 \cdot (1 + \mu)}} \cdot \left(1 \ 0 \ \frac{-1}{4z^2}\right)^T \sin(\omega x \cdot t), \\ Vy &= Ay \cdot \left(1 \ 0 \ \frac{1}{4z^2}\right)^T \cos(\omega y \cdot t); \quad Qy = \frac{Ay}{\sqrt{2 \cdot (1 + \mu)}} \cdot (0 \ 1 \ 0)^T \sin(\omega y \cdot t),\end{aligned}$$

где  $\omega x = \sqrt{(cx_1^{-1} + cx_3^{-1})/mx_2}$ ,  $\omega y = \sqrt{(my_1^{-1} + my_3^{-1})/cy_2}$  – круговые частоты

колебаний. Амплитуды лимитируются условиями прочности при сдвиге:

$$Ax \leq 0.04 \cdot z^2, \quad Ay \leq (0.005/0.627) \cdot 2z^2 \approx (z/7)^2. \quad (11)$$

Неравенство (11) свидетельствует, что при индексе  $z \gg 10$  поперечные синфазные колебания могут иметь высокую угловую скорость изгиба, и это позволяет рассчитывать на эффективную стабилизацию фононов.

В завершение вопроса укажем на существование ещё одного вида колебаний стержня, которые можно считать **квазисинфазными**. Этим колебаниям отвечает продолжение средней ветви диаграммы в область  $\alpha^2 < 0$  (рис.9); они не являются гармоническими и по пространственной координате

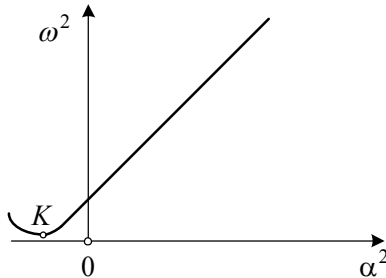


Рисунок 9 – Квазисинфазные решения дисперсионного уравнения.

описываются гиперболическими функциями  $sh(|\alpha|\theta)$ ,  $ch(|\alpha|\theta)$ .

Компьютерное моделирование дисперсионной диаграммы показало, что её средние ветви остаются практически прямолинейными вплоть до точки  $K$ , имеющей координаты  $\alpha^2 \approx -1.5$ ,  $\omega^2 \approx 15$ . Значение частоты для этой точки примерно в  $z$  раз меньше соответствующей синфазной частоты  $\omega x$ .

Средние ветви пересекаются в точке  $K_0$  (рис.10), её координаты составляют:

$$\alpha^2 = -(1 + \mu)/(1 + 2\mu) \approx -0.8, \quad \omega^2 = 4z^2 \mu/(1 + 2\mu) \approx 0.6z^2.$$

Сдвиг начала координат в точку  $K_0$  приведёт к тому, что указанные ветви будут дисперсионными диаграммами для волновых уравнений

$$a_{1,2}^{-2} \cdot \partial^2 u / \partial t_*^2 = \partial^2 u / \partial x_*^2$$

(как у фотонов, смотри учебник [6]), причём, и это также полностью корреспондируется с волновой квантовой механикой, «частоты»  $\omega_*$  и «волновые

числа»  $\alpha_*$  станут ограниченными снизу. Прояснить физический смысл соответствующего (интегрального) преобразования для координаты  $x_*$  и времени  $t_*$  пока не удалось, поэтому далее в этом направлении теория не развивалась.

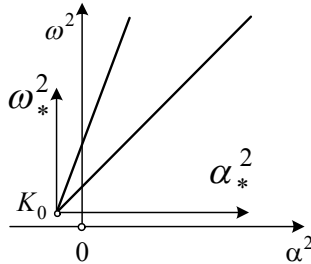


Рисунок 10 – Перенос осей на дисперсионной диаграмме.

**Выводы.** Выявлена и проанализирована (в прикладном и гносеологическом аспектах) симметрия уравнений, моделирующих группы продольных и поперечных колебаний цилиндрического винтового стержня.

Исследованы формы гармонических колебаний, используемых при синтезе винтовых волн трансляции. Показано, что для продольных колебаний среднего частотного диапазона отношение кручения и кривизны стержня изменяется пропорционально частоте. Сформулированы ограничения амплитуд колебаний исходя из условий прочности винтового стержня.

**Список литературы:** 1. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 2. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С.20-30. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 4. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 6. Вихман Э. Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. 7. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Операторные уравнения для определения частот собственных колебаний цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ», 2001. – Вип. 1 (4). – С. 111-119. 8. Справочник машиностроителя. В 3 томах. Под ред. Е.А. Чудакова. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. 9. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ», 2004.– Вип. 2 (9).– С.257-264.

Поступила в редколлегию 02.09.2010