УДК 513.88

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. преп., НТУ «ХПИ», Харьков

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ L-ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КАК НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

В роботі розглянуто абстрактні функції, задані на групі зі значеннями в просторі Фреше. Введено визначення абстрактної L – майже періодичної функції, котре не обов'язково є неперервною. Сформульоване узагальнення теореми А. Вейля для таких функцій. Доведено, що будь яка L – майже періодична функція неперервна на групі у спеціальній топології, та що будь яка функція, котра неперервна у цій топології, є такою. Така спеціальна топологія існує для нескінченної множини указаних функцій.

The abstract (vector-valued) functions defined over a group with values in Freshet space were considered. A definition of vector-valued L-almost periodic function, that are not obligatory continuous has been introduced. Generalization of theorem A. Weyl for L-almost periodic functions with rang in a Freshet space is formulated. It is proven that any L-almost periodic function is continuous over the group in special topology and any function which is continuous in this special topology is L-almost periodic function. This special topology exists for infinite set of L-almost periodic functions.

Введение. Анри Вейль [8] показал, что на любой группе G можно ввести топологию τ так, чтобы множество числовых почти периодических функций /п.п.ф./ на группе совпадало с множеством сужений на G непрерывных на компактификации $\overline{G_\tau}$ функций. Кроме того, для данной почти периодической функции f на G можно ввести метризуемую топологию τ_1 на G так, чтобы f была сужением на G некоторой непрерывной на компактификации $\overline{G_{\tau_1}}$ функции; при этом сужение на G любой непрерывной на $\overline{G_{\tau_1}}$ функции является почти периодической функцией на G.

В 1938 году Б. М. Левитан [2,3] вводит новый класс числовых комплекснозначных почти периодических функций, определенных на числовой оси. В. А. Марченко [4] заметил, что L-почти периодические функции представляют собой все непрерывные функции на некотором хаусдорфовом пространстве, полученном введением на числовой оси особой топологии.

Б. Я. Левин [1] привел новое определение L-почти периодических функций, заданных на произвольной σ-компактной группе и доказал основные положения теории почти периодических функций. В частности, он показал, что на аддитивной группе вещественных чисел R можно ввести топологию более слабую, чем евклидова так, что эта группа плотно вкладывается в компактную группу (G,Z) со следующим свойством: множество L- почти периодических функций на R совпадает с сужением на R множества непрерывных функций на G. Таким образом, было получено обобщение теоремы Анри Вейля.

А. Райх [6] ввел новое определение числовой комплекснозначной L-почти периодической функции, определенной на топологической группе, обобщил теорему А. Вейля, успел найти связь между L-почти периодическими и почти автоморфными функциями.

Целью настоящей статьи является обобщение теоремы Вейля на абстрактные L-почти периодические функции со значениями в пространстве Фреше Y. Вместе с этим покажем, что любая функция, непрерывная в специальной топологии, является L-почти периодической функцией. Данная статья является продолжением работы автора [5] об обобщении теоремы А. Вейля для абстрактных почти периодических функций.

Элемент h группы G будем называть периодом функции $f(t): G \to Y$, если выполняется следующее условие

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{saha}^{-1}t\right) = f(st), \quad \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{G}, \ \forall \mathrm{a} \in G .$$

Множество периодов функции образует нормальную подгруппу H группы G. Поэтому функцию в дальнейшем можно рассматривать как функцию без периодов, иначе ее можно рассматривать как определенную на фактор-группе G/H.

Множество U называется относительно плотным множеством на группе G, если существует n элементов $\mathrm{x}_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что

$$\mathrm{G} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{x_i} U,$$

и m элементов $\mathrm{x}'_1, x'_2, \ldots, x'_m$, что

$$\mathrm{G} = \bigcup_{i=1}^{m} U \mathrm{x}'_{\mathrm{i}} .$$

1. Вспомогательные утверждения и определения. Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений и определений.

Определение 1.[1] *Функция* $\mathrm{f}(\mathrm{t}): G \to Y$ *называется L-почти периодической (L-п.п.), если* $\forall \varepsilon > 0$ *и конечного множества* $\mathrm{N} \subset \mathrm{G}$ *, существует отно-*

[1] Это определение- модификация определение Райха[6].

сительно плотное множество $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$ *такое, что* $\mathrm{E}^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$ *, где*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{N,f},\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho\left(f\left(a\tau b\right), f\left(ab\right)\right)\right\} < \varepsilon .$$

Лемма 1. *Если множество E относительно плотно, то множество* $\mathrm{E}^{-1}E$ *симметрично и относительно плотно.*

Доказательство. Если $\mathrm{x} \in \mathrm{E}^{-1}E$, то $\mathrm{x} = \sigma^{-1}\tau$, $\sigma, \tau \in \mathrm{E}$ и $\mathrm{x}^{-1} = \tau^{-1}\sigma \in E^{-1}E$. Значит, множество $\mathrm{E}^{-1}E$ симметрично. Из относительной плотности E следует существование конечного числа элементов $\left\{a_k\right\}_{k=1}^{m}$, $a_k \in G$ таких, что $\mathrm{G} = \bigcup_{k=1}^{m} Ea_{\mathrm{k}}$. Пусть $\gamma \in E$. Тогда множество EE^{-1} относительно плотно

$$\bigcup_{k=1}^{m} EE^{-1}\left(\gamma a_k\right) \supset \bigcup E\gamma^{-1}\left(\gamma a_k\right) = \bigcup_{k=1}^{m} Ea_k = G ,$$

$$\bigcup_{k=1}^{m} EE^{-1}\left(\gamma a_k\right) = G .$$

Из симметричности множества $E^{-1}E$ следует, что и $E^{-1}E$ относительно плотно.

Определение 2. *Будем говорить, что функция f(x) обладает свойством* ***(A)****, если: для каждого конечного множества* $N \subset \mathrm{G}$ *и для каждой последовательности* $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ *из существования предела*

$$\lim_{i\to\infty} f\left(sx_i x_j^{-1} t\right) = g\left(sx_j^{-1}t\right),\ \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{N},\ \mathrm{j} = 1,2,3,...$$

следует существование подпоследовательности $\left\{y_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subset \left\{x_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ *, для которой*

$$\lim_{j\to\infty} g\left(sy_j^{-1}t\right) = f\left(st\right),\quad \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{N} .$$

Замечание 1. *Легко видеть, что если функция обладает свойством (A) на всей группе, то она обладает этим свойством и на ее подгруппе.*

Свойство (A) введено Райхом [6], оно соответствует лемме 1.3.1. В. Вича[7] и близко к понятию почти автоморфности по Бохнеру.

Лемма 2. *Если* $\forall \varepsilon > 0$ *и конечного множества* $\mathrm{N} \subset \mathrm{G}$*, существует относительно плотное множество* $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$ *такое, что* $\mathrm{E}^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon,\alpha}$ *, где*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{N,\,f},\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho\left(f\left(a\tau b\right), f\left(ab\right)\right)\right\} < \varepsilon ,$$

то функция $\mathrm{f}(\mathrm{t}): G \to Y$ *обладает свойством (A).*

Доказательство. Допустим противное, т.е., существуют $\varepsilon > 0$, последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых

$$\lim_{i\to\infty} \rho\left(f\left(sx_j^{-1}x_it\right), g\left(sx_j^{-1}t\right)\right) = 0, \ \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{N}$$

и

$$\rho\left(g\left(sx_j^{-1}t\right), f\left(st\right)\right) > \varepsilon, \ \mathrm{j} = 1,2,3,\ldots, \ \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{N}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\rho\left(f\left(sx_j^{-1}x_it\right), g\left(sx_j^{-1}t\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \ i, j = 1,2,3,\ldots, \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{N} \quad (1)$$

$$\rho\left(g\left(sx_j^{-1}t\right), f\left(st\right)\right) > \varepsilon, \ \forall \mathrm{s,t} \in \mathrm{N}, \ \mathrm{j} = 1,2,3,\ldots \quad (2)$$

Условия леммы показывают, что функция f L-почти периодична. Для множества $B_{N,f,\frac{\varepsilon}{2}}$ согласно определению 1 существует относительно плотное множество E $\left(G = \bigcup_{k=1}^{n} h_k E\right)$ такое, что $\mathrm{B}_{\mathrm{N,\,f,}\,\frac{\varepsilon}{2}} \supset E^{-1}E$. Каждый элемент $\mathrm{x_i}$ можно представить в виде: $\mathrm{x_i} = h_{k(i)}\eta_i$, $\eta_i \in E$. Так как количество элементов h_k конечно, а количество элементов $\mathrm{x_i}$ бесконечно, то существует индекс k_0 - общий для бесконечного числа элементов $\mathrm{x_m}$ так, что

$$\mathrm{x_m} = h_{k_0}\eta_m, \ m = 1,2,3,\ldots \quad (3)$$

Обозначим через $\{\mathrm{y_m}\}_{m=1}^{\infty}$ ту подпоследовательность последовательности $\mathrm{x}^{-1} \in \mathrm{M_{k+1}}$, которая выполняет равенство (3).

Тогда для подпоследовательности $\{\mathrm{y_m}\}_{m=1}^{\infty}$

$$\mathrm{y_m^{-1}y_n} = \eta_m^{-1}h_{k_0}{}^{-1}h_{k_0}\eta_n = \eta_m^{-1}\eta_n \in E^{-1}E \subset B_{N,f,\frac{\varepsilon}{2}}, \quad m,n = 1,2,3,\ldots.$$

и

$$\varepsilon < \rho\left(g\left(sy_m^{-1}t\right), f\left(st\right)\right) \le \rho\left(g\left(sy_m^{-1}t\right), f\left(sy_m^{-1}y_nt\right)\right) +$$

$$+ \rho\left(f\left(sy_m^{-1}y_nt\right), f\left(st\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если функция f(x) обладает свойством (A), то для любого множества* $B_{N,f,\varepsilon}$ *существуют положительное число* δ *, конечное множество M элементов из группы G такие, что*

$$B_{N,f\ \varepsilon} \supset B^{-1}_{M,f,\ \delta} B_{M,f,\ \delta}\ .$$

Доказательство является модификацией доказательства В. Вича (лемма 2.1.2 [7]), (см. также [6], стр. 221, лемма 2).

Лемма 4. *Множества* $B_{N,f,\varepsilon,\alpha}$ *задают базу окрестностей единицы* ***е*** *группы G и имеют следующие свойства:*

1. Для каждой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ существует окрестность $B_{M,f,\delta}$ такая, что $B_{M,f,\delta}\ B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$;

2. Для каждой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ существует окрестность $B_{M,f,\delta}$ такая, что $B^{-1}_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$;

3. Для каждой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ *и* $\forall a \in G$ существует окрестность $B_{M,f,\delta}$ такая, что $B_{M,f,\delta} \subset a.B_{N,f,\varepsilon}.a^{-1}$;

4. Для любых двух окрестностей B_{N,f,ε_1} и B_{M,f,ε_2} существует окрестность $B_{K,f,\delta}$ такая, что $B_{K,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon_1} \bigcap B_{M,f,\varepsilon_2}$;

5. Каждая окрестность $B_{N,f,\varepsilon}$ – открытое множество;

6. Пересечение всех окрестностей содержит лишь единицу;

7. Каждая окрестность является относительно плотным множеством.

Доказательство.

Докажем *свойство 1*. Из леммы 3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и конечного множества *N* существует число $\delta > 0$ и конечное множество *M* такие, что

$$B^{-1}_{M,f,\delta}\ B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$$

По числу $\delta > 0$ и конечному множеству *M* выбираем конечное множество K и число $\mu > 0$ такие, что

$$B^{-1}_{K,f,\mu}\ B_{K,f,\mu} \subset B_{M,\ f,\delta}$$

Отсюда сразу следует, что

$$B_{K,f,\mu} \subset B_{M,f,\delta} \quad \text{и} \quad B^{-1}_{K,f,\mu} \subset B_{M,f,\delta}\text{, т.е. } B^{\pm 1}_{K,f,\mu} \subset B^{\pm 1}_{M,f,\delta}\ .$$

Следовательно,

$$B_{K,f,\mu}\ B_{K,f,\mu} \subset B_{N,f,\varepsilon}\ .$$

Свойство 2. Из вышеизложенных рассуждений вытекает, что свойство 2 выполнено.

Свойство 3. Для любой окрестности $B_{N, f, \varepsilon}$ и любого элемента $a \in G$ существует конечное множество $M = Na^{-1} \bigcup aN$ такое, что

$$\max_{s,t \in N} \rho\left(f\left(sa^{-1}\tau at\right), f(st)\right) = \max_{u,v \in M} \rho\left(f(u\tau v), f(uv)\right)$$

Из этого равенства следует, что если $\tau \in B_{M, f, \varepsilon}$, то $a^{-1}\tau a \in B_{N, f, \varepsilon}$ или

$$a^{-1} B_{M, f, \varepsilon} a \subset B_{N, f, \varepsilon} .$$

Следовательно,

$$B_{M, f, \varepsilon} \subset a B_{N, f, \varepsilon} a^{-1} .$$

Свойство 4. Оно следует из выполнения включения

$$B_{K, f, \delta} \subset B_{N, f, \varepsilon_1} \bigcap B_{M, f, \varepsilon_2}$$

где $\delta = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $K = N \bigcup M$.

Свойство 5. Пусть $x_0 \in B_{N, f, \varepsilon}$ и

$$\mu = \max_{s,t \in M} \rho\left(f(sx_0 t), f(st)\right), \ \mu < \varepsilon .$$

Тогда для $\delta = \varepsilon - \mu > 0$, $M = Nx_0$ и $\tau \in B_{M, f, \delta}$. Таким образом,

$$x_0 B_{M, f, \delta} \subset B_{N, f, \varepsilon} ,$$

что непосредственно вытекает из неравенства

$$\max_{s,t \in N} \rho\left(f(sx_0\tau t), f(st)\right) \le \max_{s,t \in N} \rho\left(f(sx_0\tau t), f(sx_0 t)\right) + \max_{s,t \in N} \rho\left(f(sx_0 t), f(st)\right) \le$$

$$\max_{s_1, t \in M} \rho\left(f(s_1\tau t), f(s_1 t)\right) + \max_{s,t \in N} \rho\left(f(sx_0 t), f(st)\right) < \delta + \mu = \varepsilon - \mu + \mu = \varepsilon .$$

Свойство 6. Рассматриваемые функции не имеют периодов. Значит, единственным общим элементом всех окрестностей является единица.

Свойство 7. Оно непосредственно следует из определения 1 и леммы 1. Лемма доказана.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Любая L-почти периодическая функция f(x) непрерывна на группе G в топологии, определенной множествами*

$$B_{N, f, \varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) \right\} < \varepsilon .$$

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и конечного множества $N \subset G$, существует относительно плотное множество $E \subset G$ такое, что $E^{-1}E \subset B_{N, f, \varepsilon}$, где

$$B_{N, f, \varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) \right\} < \varepsilon .$$

На группе G можно ввести топологию $\Im_f$ множествами $B_{N,f,\varepsilon}$ согласно лемме 4. Действительно, по лемме 1 множество $E^{-1}E$ относительно плотно и множество $B_{N,f,\varepsilon}$ относительно плотно. По лемме 2 следует, что функция *f* обладает свойством (A)**.** По лемме 4 на группе G можно задать базу окрестностей топологии $\Im_f$ группы G множествами $B_{N,f,\varepsilon}$. Из определения топологии $\Im_f$ следует непрерывность функции *f.* Теорема доказана.

Теорема *2 (критерий L-почти периодичности).* *Пусть задана L-почти периодическая функция $f(t): G \to Y$ и по ней введена топология $\Im_f$ множествами $B_{N,f,\varepsilon}$ на группе G. Любая функция $g(x): G \to Y$, которая непрерывна в топологии $\Im_f$, является L-почти периодической функцией.*

Доказательство. На группе *G* введем топологию $\Im_f$ множествами

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \rho(f(a\tau b), f(ab))\right\} < \varepsilon \ .$$

Если функция $g(t)$ непрерывна в этой топологии, то для любого $\varepsilon > 0$ и элементов $a, b \in G$ существует окрестность $B_{N,f,\varepsilon}$ такая, что

$$B_{N,f,\varepsilon} \subset \{\tau \in G : \ \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon\}$$

Отметим, что окрестность $B_{N,f,\varepsilon}$, вообще говоря, зависит от выбора точки a,b и поэтому, обозначим эту зависимость $B_{N,f,\varepsilon}(a,b)$. Если возьмем конечное множество *N* элементов группы *G,* то

$$\bigcap_{a,b\in N} B_{N,f,\varepsilon}(a,b) \subset \left\{\tau \in G : \sup_{a,b\in N} \ \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon\right\}.$$

Согласно лемме 4 конечное пересечение окрестностей топологии $\Im_f$ содержит окрестность вида $B_{M,f,\delta}$ и

$$B_{M,f,\delta} \subset \bigcap_{a,b\in N} B_{N,f,\varepsilon}(a,b) \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \ \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon\right\}.$$

Так как функция f L-почти периодическая, то согласно определению 1 окрестность $B_{M,f,\delta}$ содержит множество $E^{-1}E$, где E относительно плотное множество, т.е.

$$E^{-1}E \subset B_{M,f,\delta} \subset \bigcap_{a,b\in N} B_{N,f,\varepsilon}(a,b) \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \ \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon\right\}.$$

Это и означает, что функция $g(t)$ L-почти периодическая. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько основных свойств L-почти периодических функций, заданных на группе *G* со значениями в пространстве Фреше *Y*.

Утверждение 1. *Сумма двух L-почти периодических функций снова L-почти периодическая функция.*

Доказательство. Пусть заданы L-почти периодические функции $f(t):(G,\Im)\to Y$, $g(t):(G,\Im)\to Y$. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и конечное число элементов $N \in G$, $h(t) = f(t) + g(t)$. Согласно определению 1 для каждой из функций $f(t)$ и $g(t)$ находим множество $B_{M_1,f,\delta}$, $B_{M_2,g,\gamma}$ так, что

$$\left(B_{M_1,f,\delta}\right)^{-1} B_{M_1,f,\delta} \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{4}$$

$$\left(B_{M_2,g,\gamma}\right)^{-1} B_{M_2,g,\gamma} \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \rho\left(g(a\tau b), g(ab)\right) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{5}$$

Из L-почти периодичности функций f и g следует существование относительно плотных множеств $E_{1,f}$ и $E_{2,g}$, таких что

$$\left(E_{1,f}\right)^{1} E_{1,f} \subset B_{M_1,f,\delta}, \quad \left(E_{2,g}\right)^{1} E_{2,g} \subset B_{M_2,g,\gamma}. \tag{6}$$

Согласно лемме 3 работы А. Райха ([6], стр. 223) множество W

$$W = \left(E_{1,f}\right)^{-1} E_{1,f} \cap \left(E_{2,g}\right)^{-1} E_{2,g}$$

относительно плотно и симметрично. Тогда множество $W^{-1}W$ относительно плотно и

$$W^{-1}W \subset \left(E_{1,f}\right)^{-1} E_{1,f} \left(E_{1,f}\right)^{-1} E_{1,f} \quad , W^{-1}W \subset \left(E_{2,g}\right)^{-1} E_{2,g} \left(E_{2,g}\right)^{-1} E_{2,g} \tag{7}$$

Из включений (4)-(7) получим:

$$W^{-1}W \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{8}$$

$$W^{-1}W \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \rho\left(g(a\tau b), g(ab)\right) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{9}$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\max_{a,b\in N} \rho\left(h(a\tau b), h(ab)\right) \le \max_{a,b\in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) + \max_{a,b\in N} \rho\left(g(a\tau b), g(ab)\right),$$

из неравенств (8), (9) следует:

$$W^{-1}W \subset \left\{\tau \in G : \max_{a,b\in N} \rho\left(h(a\tau b), h(ab)\right) < \varepsilon\right\}.$$

Таким образом, по определению 1 сумма двух L-почти периодических функций также является L-почти периодической функцией.

Утверждение 2. *Конечномерный вектор, все координаты которого L-почти периодические функции, также является L-почти периодической функцией.*

Доказательство. Не ограничивая общности, доказательство утверждения рассмотрим для случая двумерного вектора. Пусть заданы L-почти периодические функции $f(t): G \to Y$, $g(t): G \to Y$ и вектор $F = \{f(t),\ g(t)\},\quad t \in G,\quad F \in Y \times Y$. В пространстве $Y \times Y$ метрика задана следующим образом:

$$dis(x, y) = max\{\rho(x_1, y_1);\ \rho(x_2, y_2)\},$$
$$x = \{x_1\ ;\ x_2\},\quad y = \{y_1\ ;\ y_2\}$$
$$\rho(.) - \text{метрика в } Y,\quad x_1, y_1 \in Y,\quad x_2,\ y_2 \in Y.$$

Тогда

$$B_{N,\,F,\,\varepsilon} = \left\{\tau \in G : \max_{a,b \in N} dis(F(a\tau b), F(ab)) < \varepsilon\right\} =$$

$$\left\{\tau \in G : \max_{a,b \in N}\ \max\left(\rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right); \rho\left(g(a\tau b), g(ab)\right)\right) < \varepsilon\right\} =$$

$$\left\{\tau \in G : max\left(\max_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)); \max_{a,b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab))\right) < \varepsilon\right\} = U_{N,\,f,\varepsilon} \cap U_{N.\,g,\varepsilon}$$

Используя неравенства (8) и (9) утверждения 2 получаем, что существует относительно плотное множество W такое, что

$$W^{-1}W \subset U_{N,\,f,\varepsilon},\ W^{-1}W \subset U_{N,\,g,\varepsilon}$$

Следовательно,

$$W^{-1}W \subset U_{N,\,f,\varepsilon} \cap U_{N,\,g,\varepsilon}.$$

Это доказывает L-почти периодичность вектора.

Утверждение 3. *Равномерный предел L-почти периодических функций также L-почти периодическая функция.*

Доказательство. Покажем, что равномерная сходимость не выводит из класса L-почти периодических функций.

Пусть существует равномерный предел

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t),\quad t \in G\quad.$$

Согласно равномерной сходимости по числу $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ выбираем число K такое, что при $n > K$ выполнены неравенства

$$\rho(f_n(ab), f(ab)) < \frac{\varepsilon}{3},\quad a, b \in G \tag{10}$$

$$\rho(f_n(a\tau b), f(a\tau b)) < \frac{\varepsilon}{3},\quad a, b,\ \tau \in G. \tag{11}$$

Фиксируем n так, чтобы выполнялись неравенства (10), (11) и по L-почти периодической функции f_n для числа $\dfrac{\varepsilon}{3}$, конечного множества

$N \subset G$, согласно определению 1 существует относительно плотное множество E:

$$E^{-1}E \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho\left(f_n(a\tau b), f_n(ab)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \qquad (12)$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\max_{a,b \in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) \le \max_{a,b \in N} \rho\left(f(a\tau b), f_n(a\tau b)\right) + \max_{a,b \in N} \rho\left(f_n(a\tau b), f_n(ab)\right) \le$$
$$\le \max_{a,b \in N} p_\alpha\left(f_n(ab) - f(ab)\right)$$

из неравенств (10)-(12) следует:

$$E^{-1}E \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho\left(f(a\tau b), f(ab)\right) < \varepsilon \right\}.$$

Таким образом, по определению 1 равномерный предел L-почти периодических функций также является L-почти периодической функцией.

Теорема 3. *Если на группе G задано семейство L-почти периодических функций* $f_\lambda(t)$, $\lambda \in A$ *со значениями в пространстве Фреше Y, то существует топология на группе G, в которой непрерывны все функции этого семейства и любая функция g(x), которая непрерывна в этой топологии, является L-почти периодической на группе G.*

Доказательство. Пусть задано семейство $f_\lambda(t)$, $\lambda \in A$ *L*-почти периодических функций на группе *G*, где *A* – некоторое множество индексов. На группе *G* введем новую топологию $\mathfrak{I}_N$ при помощи окрестностей

$$B_{N,f,\varepsilon,\sigma} = \left\{ \tau \in G : \max_{\lambda \in \sigma} \max_{a,b \in N} \rho\left(f_\lambda(a\tau b), f_\lambda(ab)\right) < \varepsilon \right\},$$

где N, σ произвольные конечные множества, $N \subset G, \sigma \subset A$.

Множества $B_{N,f,\varepsilon,\sigma}$ являются конечными пересечениями множеств вида

$$B_{N,f_\lambda,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho\left(f_\lambda(a\tau b), f_\lambda(ab)\right) < \varepsilon \right\}.$$

Если функция $f_\lambda(t)$ фиксирована, множества $B_{N,f_\lambda,\varepsilon}$ выполняют все свойства леммы 4.

Пусть заданы две функции $f, g : G \to Y$. Рассмотрим функцию $F = \{f, g\} : G \to Y \times Y$. В пространстве $Y \times Y$ метрика задана следующим образом:

$$dis(x, y) = max\{\rho(x_1, y_1);\ \rho(x_2, y_2)\}, \quad x = \{x_1;\ x_2\}, y = \{y_1;\ y_2\}$$
$$\rho(.) - метрика в\ Y, x_1, y_1 \in Y,\ x_2 y_2 \in Y.$$

Если каждая из функций *f* и *g* L- почти периодична, то функция F=$\{f; g\}$ L-почти периодична по утверждению3. Множество

$$U_{N,\varepsilon}(f, g) = \left\{ \tau : \max_{a,b \in N} dis\left(F(a\tau b), F(ab)\right) < \varepsilon \right\} =$$

$$\left\{ \tau \in G : \max_{a,b\in N} \max \left(\rho\left(f\left(a\tau b\right), f\left(ab\right)\right); \rho\left(g\left(a\tau b\right), g\left(ab\right)\right)\right) < \varepsilon \right\} =$$

$$\left\{ \tau \in G : \max\left(\max_{a,b\in N} \rho\left(f\left(a\tau b\right), f\left(ab\right)\right); \max_{a,b\in N} \rho\left(g\left(a\tau b\right), g\left(ab\right)\right)\right) < \varepsilon \right\} = U_{N,f,\varepsilon} \cap U_{N,g,\varepsilon}$$

удовлетворяет свойствам леммы 4.

В случае окрестностей вида $U_{N,f,\varepsilon}$ для функции f и $U_{M,g,\varepsilon}$ для функции g используем включение

$$U_{N\cup M,f,\varepsilon} \cap U_{M\cup N,g,\varepsilon} \subset U_{N\cup M,\varepsilon}(f,g) = U_{N,f,\varepsilon_1} \cap U_{M,g,\varepsilon_2}, \qquad \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

Таким образом, множества вида $U_{N,f,\varepsilon}$, $U_{M,g,\varepsilon}$ являются окрестностями некоторой топологии, в которой непрерывны функции f и g.

Таким образом, все конечные пересечения множеств вида $B_{N,f,\varepsilon,\sigma}$ являются окрестностями некоторой топологии $\Im_A$, в которой непрерывны все функции f_λ, $\lambda \in A$.

Пусть функция g непрерывна в топологии $\Im_A$. Тогда согласно теореме 2. она L-почти периодическая.

3. Выводы: Введено определение абстрактной *L*-почти периодической функции, в котором не требуется непрерывность и поэтому функции заданы на произвольной группе. Не требуется задания топологии на группе.

Сформулировано обобщение теоремы Вейля для абстрактных *L*-почти периодических функций. Доказано, что любая *L*-почти периодическая функция непрерывна на группе в специальной топологии, и что любая функция, которая непрерывна в этой специальной топологии – *L*-почти периодическая. Показано, что такая специальная топология существует для бесконечного множества L-почти периодических функций.

Список литературы: **1**. *Левин Б.Я.* О почти периодических функциях Левитана// УМЖ. Т.1, № 1. 1949, С. 49-101. **2.** *Левитан Б. М.* Новое обобщение почти периодических функций H. Bohr'a// Зап. Харьк. ин-та матем. и матем. о-ва, XV, №2, 1938. **3.** *Левитан Б. М.*, Некоторые вопросы теории почти периодических функций// УМЖ, II, В.6, 1947, с.174-214. **4.** *Марченко В. А.* Обобщенные почти-периодические функции.//ДАН СССР, 1950, Т.XXIV, №4, С. 893. **5.** *Dimitrova-Burlayenko S.D.*, On Continuity Properties of Almost-Periodic Functions, Euromech Colloquium 498, Conference Proceedings, p. 150-153. **6.** *Reich A.* Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität// Math. Z.,116, p.216-234. **7.** *Veech W. A.* Almost automorphic functions on groups// Amer. J. Math., 87, №3, 1965, p.719-751. **8.** *Weyl A.* Sur les functions Presque periodiques de von Neuman// C. R. Acd. Sci. Paris, 200, 1935, p.38-40.

Поступила в редколлегию 08.10.2010