

С.В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНТЕННС ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

В роботі для випадку випромінювання циліндричної хвилі з подовжніх щілин побудовані дискретні математичні моделі на базі гіперсингулярних та сингулярних інтегральних рівнянь чисельними методами дискретних особливостей, при цьому використані квадратурні формули інтерполяційного типу, які зведені до систем алгебраїчних рівнянь.

In this work for the case of cylindrical wave radiation from longitudinal slits discrete mathematic models are built on the basis of hypersingular and singular integral equations with numerical methods of discrete peculiarities, by using quadrature formulae of interpolation type that are reduced to the systems of linear algebraic equations.

Введение. Математическая модель резонаторной апертурной антенны – цилиндрическая антенна с конечным числом продольных щелей, которая возбуждается линейным источником, расположенным на оси цилиндра. Такие электродинамические структуры используются в антенной технике для авиации и ракетостроения и как зеркальные антенны СВЧ.

В работах Goldstone L. O., Oliner A. A., W.A. Johnson и R.W. Ziolkowski, J. Brian Grant, Носича А.И., Назарчука З.Т. [1-5] и других ученых построены методы позволяющие провести расчеты структур с одной неоднородностью – продольной щелью. В тоже время интерес вызывают структуры имеющие конечное число продольных щелей. Модель позволяющая рассчитывать характеристики для структур с несколькими щелями дает возможность подбирать параметры в более широком диапазоне: количество, размеры и взаимное расположение щелей. Это дает возможность расширить круг решаемых задач.

В работе краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к граничным гиперсингулярным и сингулярным интегральным уравнениям. Полученные интегральные уравнения сведены к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при помощи метода дискретных особенностей. Данный метод, применяемый в работах Ганделя Ю.В. и его учеников [6-7], для решения электродинамических задач с конечным числом неоднородностей показал свою эффективность.

Математическая модель. В работе рассмотрен случай излучения цилиндрической волны, зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Вмещающая среда однородна и изотропна. На оси цилиндра источник, создающий поле. Известно, что электромагнитное поле внутри и вне рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Задачу излучения цилиндрической волны из продольных щелей цилиндрической антенны сводим к краевой задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца с границей, изображенной на рис. 1.

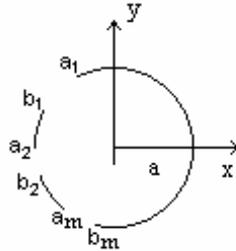


Рисунок 1 – Поперечное сечение цилиндрической поверхности с m щелями.

Введем обозначения: пусть щели – дуги (a_q, b_q) , $q = 1, \dots, m$ окружности S_a . $a_q = a\alpha_q$, $b_q = a\beta_q$, $\phi \in (\alpha_q, \beta_q)$, $L \equiv \bigcup_{q=1}^m (\alpha_q, \beta_q)$, а $CL = [-\pi, \pi] \setminus L$. Следы щелей в перпендикулярном сечении (L) будем называть «основными интервалами», а следы металлических лент (CL) – «дополнительными интервалами».

Искомая функция $u(r, \phi)$, описывающая поле во всем пространстве $u(r, \phi) = E_z(r, \phi)$, удовлетворяет следующим условиям:

–уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(r, \phi) + k^2 u(r, \phi) = 0, \tag{1}$$

в области $R^2 \setminus \left(S_a \setminus \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i) \right)$ – внешность замкнутых дуг окружности S_a , оставшихся после удаления щелей.

–граничному условию

$$u(r, \phi)|_{r=a} = -u_0(r, \phi)|_{r=a}, \quad \phi \in CL, \quad (2)$$

где $u_0(r, \phi) = H_0^{(1)}(kr) - CH_0^{(2)}(kr)$, $C = \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}$, так что функция

$$u_0(r, \phi)|_{r=a} \equiv 0.$$

Предполагается, что на оси цилиндра источник, создающий поле, $u^{ism}(r, \phi) = H_0^{(1)}(kr)$.

- условиям излучения Зоммерфельда;
- условие Майкснера на ребре.

Ограничения искомой функции $u(r, \phi)$ обозначим на круг $r < a$ и внешность круга $r > a$, соответственно $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$. Если функции $u^+(r, \phi)$, $r < a$ и $u^-(r, \phi)$, $r > a$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены т.н. «условия сопряжения»,

$$u^+(r, \phi)|_{r=a} = u^-(r, \phi)|_{r=a}; \quad \frac{\partial u^+(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial u^-(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad \phi \in CL, \quad (3)$$

то существует функция $u(r, \phi)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца во всем пространстве без объединения дуг $\bigcup_{q=1}^m [a_q, b_q]$ окружности S_a , причем $u(r, \phi) = u^+(r, \phi)$, $r < a$ и $u(r, \phi) = u^-(r, \phi)$, $r > a$.

Представления для функций $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (5) при $r \neq a$, ищем в виде обобщенных рядов Фурье

$$u^+(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ J_n(kr) e^{in\phi}, \quad r < a,$$

$$u^-(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(kr) e^{in\phi}, \quad r > a,$$

Используя условия сопряжения (3) и граничное условие (2), получим парный ряд Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} kC_n \Gamma_n e^{in\phi} = -\partial_r u_0 \Big|_{r=a}, \quad \phi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL \end{array} \right. , \quad (4)$$

где введено обозначение: $\Gamma_n = \left[\frac{J_n'(ka)}{J_n(ka)} - \frac{H_n^{(1)'}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \right]$,

$$C_n^+ J_n(ka) = C_n^- H_n^{(1)}(ka) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Вывод сингулярного интегрального уравнения на «дополнительных интервалах». В случае вычисления поля, излученного из щелей малых размеров, удобно располагать точки интерполяции не в щелях структуры, а на металле. Для этого сделаем в парном ряде (4) замену:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{B_n}{\Gamma_n}, \quad n \neq 0 \\ C_0 = \frac{B_0}{\Gamma_0} - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a} \end{array} \right. .$$

С учетом замены парное уравнение (4) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_n e^{in\phi}}{\Gamma_n} = \frac{\partial_r u_0}{k\Gamma_0} \Big|_{r=a}, \quad \phi \in CL \end{array} \right. , \quad (5)$$

Проводя рассуждения, как и в работе [8], сводим парное уравнение (5) к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с дополнительным условием. Для этого введем в рассмотрение неизвестную функцию

$$v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi}.$$

Удовлетворяя условие Майкснера на ребре и сделав замену переменных, переходим от интервала (α_q, β_q) к стандартному интервалу $(-1, 1)$:

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2},$$

$$v(\phi)|_{(\alpha_q, \beta_q)} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{\gamma_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Запишем систему СИУ на стандартном интервале:

$$\frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_q(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 G_{pq}(t, t_0) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad q=1, \dots, m, \quad (6)$$

$$\text{где } G_{pq}(t, t_0) = \frac{B}{2} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\text{ctg} \frac{g_p(t) - g_q(t)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t)} \right] + \\ + (1 - \delta_{pq}) B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t) - g_q(t)} + K_{pq}(t, t_0)$$

$$K_{pq}(t, t_0) = \frac{b_q - a_q}{2} \sum n \left(\Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin \left(n (g_p(t) - g_q(t_0)) \right), \quad p=1, \dots, m$$

и дополнительные условия:

$$\frac{B}{\pi} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 Q_{pq}(t) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\Gamma_0} \pi \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a}, \quad q=1, \dots, m. \quad (7)$$

$$\text{где } Q_{pq}(t) = -(1 - \delta_{pq}) B \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} -$$

$$-B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 H_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}};$$

$$H_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(g_p(t) - g_q(t_0))).$$

Заменяя в (6), (7) неизвестную функцию $\gamma_p(t)$ интерполяционными полиномами и используя для дискретизации квадратурные формулы интерполяционного типа, а входящие в уравнение интегралы – интерполяционными квадратурными формулами, предварительно заменив ядра уравнений их интерполяционными полиномами с теми же узлами, получаем СЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\gamma_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = 0 \\ \frac{B}{N_q} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} \gamma_q(t_i^{N_q}) + \\ + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = \frac{1}{\Gamma_0} \pi \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a} \end{array} \right. , \quad (8)$$

где $j = 1, \dots, N_q - 1$, $q = 1, \dots, m$,

Вывод граничного гиперсингулярного интегрального уравнения на «основных интервалах». Применяя параметрические представления интегральных операторов [8] с гиперсингулярным и гладким ядром к парному ряду (4), запишем гиперсингулярное интегральное уравнение (ГСИУ) на системе отрезков в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{A_0}{2\pi} a \cdot f \cdot p \cdot \int_L \frac{v(\theta)}{2 \sin^2 \frac{\theta - \phi}{2}} d\theta - \frac{A_1}{\pi} \int_L v(\theta) \ln \left| \sin \frac{\theta - \phi}{2} \right| d\theta - \frac{A_1 \ln 2}{\pi} \int_L v(\theta) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_L K(\theta, \phi) v(\theta) d\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L v(\theta) d\theta = f(\phi), \end{aligned} \quad (9)$$

где $K(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - A_0 |n| - A_1 \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(\phi - \theta))$;

$$-\frac{\partial_r u_0(r, \phi)}{k} \Big|_{r=a} = f(\phi).$$

Используя метод дискретных особенностей сводим ГСИУ (9) к СЛАУ:

$$\begin{aligned} & \frac{B_1}{N_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_p-1} \gamma_p^{N_p-2} (t_{0k}^{N_p}) \left(1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \frac{1 - (-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{N_p} - t_{0k}^{N_p})^2} - B_1 \frac{N_p}{2} \gamma_p^{N_p-2} (t_{0j}^{N_p}) - \frac{B_2}{N_p} \left(\frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \right)^2 * \\ & * \sum_{k=1}^{N_p-1} \gamma_p^{N_p-2} (t_{0k}^{N_p}) \left(1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{N_p-1} \frac{1}{r} T_r(t_{0k}^{N_p}) T_r(t_{0j}^{N_p}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2N_p} \right] - \\ & - \sum_{q=1}^m \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q-1} \gamma_q(t_{0k}^{N_q}) \left(1 - (t_{0k}^{N_q})^2 \right) K_{pq}(\mathbf{g}_p(t_{0j}^{N_p}), \mathbf{g}_q(t_{0k}^{N_q})) = \\ & = -\tilde{f}_p(t_{0j}^{N_p-2}), \quad j = 1, \dots, N_p - 1, \quad p = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Для построения диаграммы направленности, используем формулу:

$$D_E(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{-i\frac{\pi n}{2}}}{H_n^{(1)}(ka)} e^{in\phi}. \quad (11)$$

Вывод граничного сингулярного интегрального уравнения на «основных интервалах». Сведем задачу (1-3) к сингулярному интегральному уравнению. Вывод парного ряда Фурье, описанный выше, остается без изменений. Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию:

$$F(\phi) = v'(\phi) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} in C_n e^{in\phi}.$$

Используя параметрическое представление для интегрального оператора с ядром котангенс сводим парное уравнение (4), к сингулярному интегральному уравнению с ядром котангенс на системе отрезков в виде:

$$-\frac{A_0}{2\pi} \mathbf{v.p.} \int_L F(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \phi}{2} d\theta - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L \theta F(\theta) d\theta +$$

$$+ \sum_{n=0} \left((\Gamma_n - A_0 |n|) e^{in\phi} \right) \frac{1}{2\pi} \int_L F(\theta) \frac{e^{-in\theta}}{in} d\theta = f(\phi). \quad (12)$$

Переходя на стандартный интервал $(-1;1)$ и применяя метод дискретных особенностей, сводим СИУ (12) к СЛАУ.

$$\begin{aligned} & - \frac{2A_0}{(\beta_p - \alpha_p) N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\gamma_p^{N_p}(t_k^{N_p})}{(t_k^{N_p} - t_{0j}^{N_p})} + \sum_{q=1}^m \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} K_{pq}(t_k^{N_q}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_q^{N_q}(t_k^{N_q}) = \\ & = \tilde{f}_p(t_{0j}^N), \quad j=1, \dots, N_p - 1, \quad p=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (13)$$

и дополнительное условие

$$\sum_{k=1}^{N_q} \gamma_q^{N_q}(t_k^{N_q}) = 0, \quad q=1, \dots, m. \quad (14)$$

где $K_{pq}(t_k^{N_q}, t_{0j}^{N_q})$ известное гладкое ядро.

Результаты численного анализа. На основе построенных дискретных математических моделей (8), (10), (13-14) были разработаны компьютерные алгоритмы. С использованием компьютерного продукта был проведен численный анализ.

Сравнение результатов для задачи излучения цилиндрической волны из щелей цилиндра, которые были получены используя построенные дискретные математические модели, представлены в табл. 1. В табл. 1 приведены нормы коэффициентов прохождения, а также время, затраченное на их вычисление (параметры структуры $ka=4$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $R=1$, структура с одной щелью).

Данные приведенные в таблице 1 показывают, что математические модели дают одинаковый результат для одинаковой структуры. Кроме этого контроль точности результатов можно производить внутри одного метода, для этого необходимо сгущать сетку узлов интерполяции, т.к. методы сходятся. Также из таблицы видно, что для нахождения результата лучше использовать модель, основанную на гиперсингулярном интегральном уравнении, так как она имеет лучшую скорость сходимости и меньшую затрату ма-

шинного времени для получения результата при одинаковом числе узлов интерполяции. Исходя из этого, все дальнейшие результаты получены с использованием модели на основе ГСИУ.

Таблица 1

Нормы коэффициентов прохождения					
	СИУ		ГСИУ		СИУ (доп. инт.)
	N=10				
C ₀	7.272020e-002	1.05	7.276056e-002	0.109	
C ₁	6.745604e-002		6.749474e-002		
C ₂	5.325068e-002		5.328422e-002		
	N=50			N=150	
C ₀	7.270561e-002	21.1	7.270586e-002	2.218	7.272575e-002
C ₁	6.743969e-002		6.743994e-002		6.746361e-002
C ₂	5.322914e-002		5.322938e-002		5.326162e-002
	N=100			N=200	
C ₀	7.270586e-002	84.4	7.270586e-002	16.65	7.272580e-002
C ₁	6.743995e-002		6.743994e-002		6.746444e-002
C ₂	5.322942e-002		5.322939e-002		5.324868e-002

Важной электродинамической характеристикой является норма коэффициентов прохождения. На рис.2. приведены расчеты модуля коэффициента прохождения в зависимости от волнового числа, в случае трех щелей в цилиндрической поверхности $\alpha_1 = 0^0$, $\beta_1 = 5^0$, $\alpha_2 = 87.5^0$, $\beta_2 = 92.5^0$, $\alpha_3 = 175^0$, $\beta_3 = 180^0$.

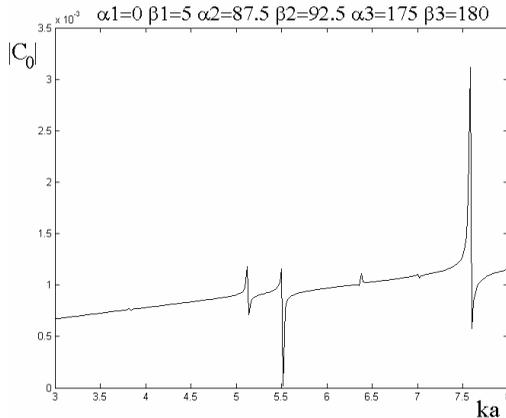


Рисунок 2 – Норма коэффициента прохождения $|C_0|$ для различных параметров волнового числа ka в случае трех щелей.

На рис.3 – диаграмма направленности в дальней зоне (11), отвечающая локальному максимуму коэффициента прохождения $ka = 5.5$, изображенного на рис.2.

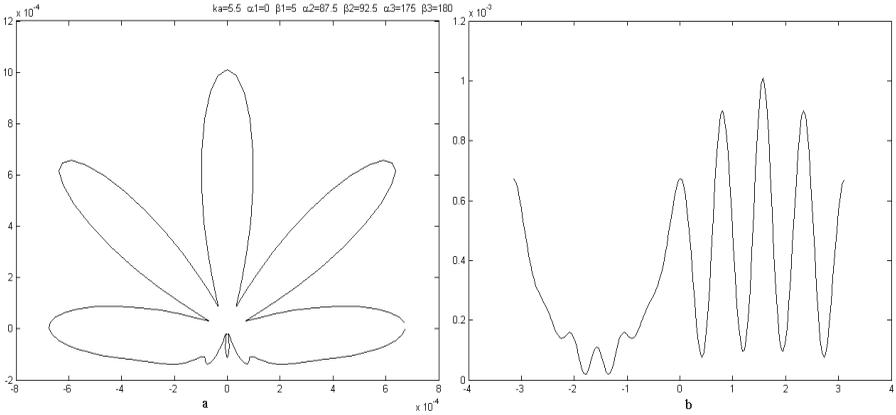


Рисунок 3 – Диаграмма направленности поля в дальней зоне, излучение из трех щелей (компонента E_z), (a – полярные координаты, b – декартовы координаты).

Анализ диаграмм направленности показывает, что для случая $ka = 5.5$ (рис. 3) уровень боковых лепестков равен

$$\frac{|D_E(\phi_{1,2})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.89 \quad \text{и} \quad \frac{|D_E(\phi_{3,4})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.66 .$$

При этом ширина «по нулям» главного лепестка равна $2\theta_0 = 44^\circ$.

Используя разработанные компьютерные алгоритмы могут быть построены поля в ближней зоне. Расчет полей в дальней и ближней зонах представляет большой интерес для разработчиков антенн, особенно мобильной связи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Ахиезера.

Выводы. В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла с границей – цилиндрической поверхностью с продольными

щелями, сведены к гиперсингулярным и сингулярным интегральным уравнениям на системе отрезков. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели для приближенного (с контролируемой точностью) решения рассмотренных краевых задач. На базе построенных дискретных математических моделей реализовано программное обеспечение, проведены расчеты технических характеристик (диаграмм направленностей, полей в ближней зоне) для антенных структур с конечным числом неоднородностей.

Список литературы: 1. *Goldstone L. O.* Leaky wave antennas II: Circular waveguides / *L. O. Goldstone, A. A. Oliner* // IRE Trans. Antennas Propagat. – 1961. – Vol. 9, № 3. – P. 280–290. 2. *Johnson W. A.* The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach / *W. A. Johnson and R. W. Ziolkowski* // Radio Sci. – 1984. – vol. 19, № 1. – P. 275–291. 3. *Richard W. Ziolkowski* Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem / *Richard W. Ziolkowski, J. Brian Grant* // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1987. – Vol. 35, № 5. – P. 504–528. 4. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / *З. Т. Назарчук*. – К. : Изд-во Наукова Думка, 1989. – 256 с. 5. *Носич А. И.* Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью / *Носич А. И., Шестопалов В. П.* – Харьков : ИРЭ АН УССР, 1977. – 52 с. (Препринт / АН Украины, Институт радиофизики и электроники ; №78). 6. *Гандель Ю. В.* Математические модели некоторых аксиально-симметричных задач волноводной дифракции / *Ю. В. Гандель, С. А. Стещенко* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2002. – Т. 7, № 6, – С. 12–31. 7. *Гандель Ю. В.* Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения / *Ю. В. Гандель, А. С. Кононенко* // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1256–1262. 8. *Гандель Ю. В.* Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многощелевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков / *Ю. В. Гандель, С. В. Духопельников* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Зб. наук. праць. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264–293.

Поступила в редколлегию 01.10.2010