

А.Г. КОШОВИЙ, аспірант НАУ «ХАІ» ім. М.С.Жуковського, Харків
В.А. ВАНІН, д-р. техн. наук, ПІМаш ім. А.М.Підгорного НАНУ, Харків

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ДОФРАКТАЛЬНОГО РОЗСІЮВАЧА З ЕКРАНОМ

Розглянуто розсіювач акустичної хвилі у вигляді дофрактальної системи циліндричних стрічок та розібрано його взаємодію із еліптичним екраном. Обґрунтовано застосування прямих чисельних методів для такого класу задач.

The scattering problem of the acoustic wave by pre-fractal system of cylindrical curvilinear strips has been formulated and solved for induced currents densities. The direct numerical method of mechanical quadratures (MQ-method) has been used successfully to find currents densities distribution on the strips in the case of the CSA – fractal's generator.

1. Вступ. Розглядається дофрактальна система циліндричних стрічок, що збуджується плоскою акустичною хвилею. Стрічки вважаються абсолютно м'якими, але в загальному вигляді їх напрямні є сегментами гладких дуг. З математичної точки зору задача розсіювання може бути сформульована у вигляді задачі Діріхле для двовимірного рівняння Гельмгольца. Така постановка задачі є класикою і розглядалася багатьма дослідниками ще в минулому столітті.

У даній статті класична теорія розсіювання буде поєднуватись з новою теорією фракталів, яку започаткував Бенуа Мендельброт, узагальнюючи роботи своїх попередників: Пуанкаре, Кантора, Хаусдорфа та ін.[1]. Вказане поєднання полягає у тому, що напрямні системи стрічок утворюють певну стадію побудови самоподібного фракталу (СПФ) зі змінною розмірністю Хаусдорфа(РХ).[2]. Окрім дофрактальних систем стрічок розглядається стрічка, напрямна якої є дуга кола. Вона відіграє роль екрана, що може посилювати, чи послаблювати акустичні властивості дофрактального розсіювача.

2. Постановка задачі. На систему з певної кількості абсолютно тонких циліндричних стрічок з паралельними краями набігає плоска акустична хвиля. Розташування стрічок у системі має бути строго впорядкованим у відповідності з різними математичними законами побудови СПФ та самі стрічки можуть бути криволінійними. Тому слід деталізувати постановку задачі з відображенням вказаної нової математичної впорядкованості розташування стрічок та їх криволінійності. На малюнку зображено напрямні екранованої дофрактальної системи стрічок, що відповідає утворювачу СПФ зі змінною

РХ. Тут використовуються вихідні змінні $x_1^1(t) = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t$, $x_2^1(t) = \frac{1}{5}t$ та $x_3^1(t) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}t$, де $t \in [-1, 1]$ що відповідають першій стадії побудови СПФ. Також слід зазначити, що ординати є різними: $y_1^1(t) = (t^3 - t)(t - \frac{2}{5})$, $y_2^1(t) = (t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{4})$ та $y_3^1(t) = (t^3 - t)(t + \frac{2}{5})$. Напрямна екрану визначається формулою $x(t) = 3 \sin \frac{\pi}{4}t$, $y(t) = 3 \cos \frac{\pi}{4}t$, $t \in [-1, 1]$.

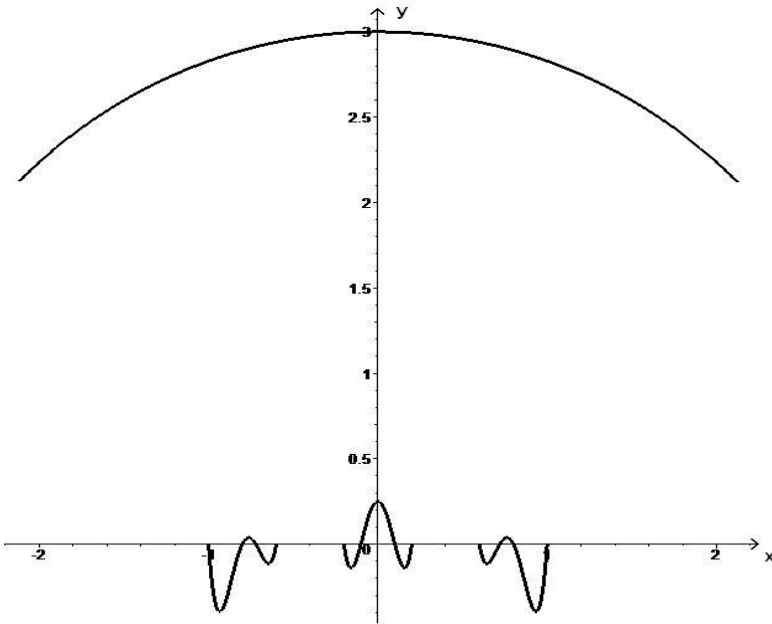


Рисунок 1– Поперечний переріз розсіювача акустичних хвиль з екраном.

Щоб отримати другу стадію побудови СПФ, треба першу його стадію зменшити у п'ять разів та замінити нею елементи першої стадії. Таким чином отримаємо дев'ять дуг в якості напрямних розсіювача, а екран залишається без змін. Коли цей процес продовжувати до нескінченності, то утвориться фрактальний об'єкт, який ми назвемо множиною дуг Кантора (МДК). Якщо у

цьому процесі використовувати сегменти, то ця побудова призведе до структури схожої з класичною множиною Кантора, яку назвемо множиною сегментів Кантора утвореною за п'ятірним принципом (МСК5). Як відомо, класична множина Кантора є досконалою множиною з нульовою топологічною

розмірністю. У той же час її розмірність Хаусдорфа дорівнює $d_x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ і є

строго додатною. У нашому випадку, як не важко довести, подібно до класичної теорії, топологічна розмірність для МСК5 також дорівнює нулю, а от

розмірність Хаусдорфа $d_x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$. Процес творення самоподібних фракталів

можна змінювати як за рахунок кількості дуг утворювача, так і за рахунок їх форми.

На стрічках, де шукані функції мають розрив, рівняння акустики не виконуються. Граничним переходом до нескінченно тонкого шару з великими градієнтами ρ і \tilde{c} до поверхні отримуємо граничні умови, що пов'язують їх значення по різні боки згаданої поверхні. У акустиці зручно розглядати два ідеалізовані середовища в які акустичні коливання не проникають, і в яких $p = 0, v = 0$. Існують реальні середовища, властивості яких близькі до властивостей ідеалізованих середовищ і на них ми будемо в подальшому спиратись, як на можливі варіанти практичного застосування, але для конкретності розглядаємо лише випадок абсолютно м'яких стрічок. Абсолютно м'яким називають тіло, в якому $\rho\tilde{c} = 0$ на поверхні такого тіла $p|_s = 0$. [3] Таким чином маємо задачу Діріхле для двовимірного рівняння Гельмгольца.

3. Перетворення інтегральних рівнянь. Для розв'язання задачі Діріхле застосуємо метод інтегральних рівнянь, що дозволяє зводити зовнішню крайову задачу до інтегральних рівнянь меншої вимірності на обмеженій кількості дуг. При його застосуванні використовується фундаментальний розв'язок двовимірного рівняння Гельмгольца

$$G(u) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|u|)$$

тут $H_0^{(1)}(z)$ є функцією Ханкеля.

Окрім рівняння Гельмгольца ця функція задовольняє умови випромінювання і дає можливість інтегрального подання шуканої функції $p(\bar{r})$:

$$p(\bar{r}) = \int_{\gamma} G(k|\bar{r}' - \bar{r}|) J(\bar{r}') dl', \bar{r} \in R^2 \setminus \gamma, \gamma = \bigcup_m \gamma_m.$$

Отже, замість $p(\bar{r})$ слід знайти функцію $J(\bar{r})$, що визначена на системі дуг γ_m . Для цього використаємо крайові умови і отримаємо систему інтегральних рівнянь (СІР)

$$\int_{\gamma} G(k|\bar{r}' - \bar{r}|)J(\bar{r}')dl' = p_0(\bar{r}), \quad \bar{r} \in \gamma.$$

Щоб перейти від криволінійних до звичайних інтегралів скористаємось параметричною формою задавання системи дуг $\gamma_m : \bar{r}_m(t) = (x_m(t), y_m(t)), |t| \leq 1$. В результаті виникне загальна математична модель взаємодії акустичної хвилі з екранованим дофрактальним абсолютно м'яким та нескінченно тонким розсіювачем, що має вигляд наступної системи інтегральних рівнянь (СІР):

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 j_e(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_e(t) - \bar{r}_e(\tau)|)dt + \\ & + \sum_{p=1}^{3^n} \int_{-1}^1 j_p(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_p(t) - \bar{r}_e(\tau)|)dt = \frac{2i}{\pi} e^{ik\bar{q}_e(\tau)} \int_{-1}^1 j_e(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_e(t) - \bar{r}_m(\tau)|)dt + \\ & \sum_{p=1}^{3^n} \int_{-1}^1 j_p(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_p(t) - \bar{r}_m(\tau)|)dt = \frac{2i}{\pi} e^{ik\bar{q}_m(\tau)} \end{aligned}$$

$$|\tau| \leq 1, \quad m = 1, \dots, 3^n.$$

Перше рівняння пов'язане з екраном, тому маємо наступну параметризацію

$\bar{r}_e(\tau) = R(\sin \gamma\tau, \cos \gamma\tau)$, а решта рівнянь визначені на дофрактальній системі напрямних дуг $\bar{r}_k^{(n)} = (x_k^{(n)}(\tau), y_k^{(n)}(\tau))$.

Тут n вказує на номер стадії побудови СПФ, а, відповідно, $x_k^{(n)}(\tau)$ вихідні змінні геометричної моделі процесу побудови СПФ зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Функція $y^{(n)}(\tau)$ задає форму напрямної дуги. Будемо вважати ці дуги однаковими і симетричними, наприклад $y(\tau) = c(1 - \tau^2)$. Зокрема, коли $c = 0$ отримаємо звичайну прямолінійну дифракційну ґратку, яку можна використовувати в генераторі дифракційного випромінювання.[4]

Розглянемо детальніше аргументи у функції Ханкеля, що визначає ядра даної системи. Зупинимось для простоти на утворювачі МСК фракталу, зображеному на першому малюнку. Тут маємо три дуги та екран, то і система має чотири рівняння і чотири шукані функції. Коли підставимо параметризовані радіуси-вектори до аргументів діагональних ядер, то отримаємо:

$$k|\bar{r}_e(\tau) - \bar{r}_e(t)| = kR\sqrt{2 - 2\cos \gamma(\tau - t)}, \quad k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)| = \chi_1 |\tau - t| \sqrt{1 + \varepsilon^2 w_m^2(\tau, t)},$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \chi_1 = \frac{ka}{3}, \quad w_m(\tau, t) = \frac{y_m(\tau) - y_m(t)}{\tau - t} = \tau^2 + \tau \cdot t + t^2 + (-1)^m \frac{1}{2}(\tau - t) - 1.$$

А у випадку розсіювача, що вказано на малюнку аргументи діагональних ядер починаючи з другого будуть мати вигляд $k|\bar{r}_1(\tau) - \bar{r}_1(t)| = k\alpha_1|\tau - t|$, а перший залишається таким же самим: $k|\bar{r}_e(\tau) - \bar{r}_e(t)| = kR\sqrt{2 + 2\cos\gamma(\tau - t)}$, де R - радіус кола, частина якого виступає, в даному випадку, екраном.

Отже стає очевидним, що СІР є сингулярною, бо діагональні ядра містять логарифмічну особливість, яку можна досить просто виділити користуючись відомим розвиненням функції Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi} \left[\ln \frac{\gamma z}{2i} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \left(\ln \frac{\gamma z}{2i} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right].$$

В результаті отримуємо систему

$$\int_{-1}^1 j_j(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{m=1}^{3^j+1} \int_{-1}^1 j_m(t) R_{lm}(\tau, t) dt = e^{ik\bar{q}_j(\tau)}, |\tau| < 1.$$

Тут $R_{km}(\tau, t)$ є регулярними ядрами:

$$R_{km}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_k(\tau) - \bar{r}_m(t)|), \kappa \neq m$$

$$R_{mm}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)|) - \ln|\tau - t|$$

Подібним чином здійснюється виділення особливості “у чистому вигляді”, що є важливим для використання чисельних та чисельно-аналітичних методів розв’язку СІР, у випадку будь-якого утворювача для вказаного класу МСК. Більше того, це можна успішно робити для будь-якої стадії творення МСК, та більшості відомих узагальнень. Хоча при цьому і збільшується кількість рівнянь у системі та кількість інтегралів у рівняннях, але також, відбувається зменшення частотного параметру, що приводить до зменшення, наприклад, квадратурних вузлів для досягнення необхідної точності.

Остання система є повністю підготовленою до застосування прямого чисельного методу механічних квадратур(МК), який був розроблений і обґрунтований у монографії[6]. Він також себе добре зарекомендував і у випадку криволінійних стрічок вказаного класу. Іншим, не менш ефективним, методом є чисельно-аналітичний метод регуляризації, що використовує формулу обернення Т.Карлемана і був свого часу обґрунтований И.Н.Векуа, цей метод

дозволяє отримати явний асимптотичний розв'язок, що є важливим для граничного переходу при можливому дослідженні фракталів. Також до останньої системи можна застосувати метод дискретних особливостей, що дає можливість порівняння результатів, отриманих методом МК, не лише з асимптотичними розв'язками, а і з результатами іншого чисельного методу, що дозволяє отримати більш загальну картину процесів взаємодії екрана та розсіювача акустичних хвиль.

4. Висновки. У даній роботі було розглянуто задачу взаємодії розсіювача акустичних хвиль, представленого у вигляді системи циліндричних стрічок, які у перерізі представляють собою першу стадію творення фрактала об'єкту, з екраном, що являє собою сегмент кола. Надалі можливі розширення досліджень можна реалізовувати переходячи до інших стадій творення фрактала, також можна розглядати екрани іншої форми, зокрема дуги гіперболи чи параболи. Ще можливі варіанти переходу до абсолютно жорстких систем стрічок чи, навіть, використовувати граничну умову третього роду. Абсолютно жорсткими називаються тіла, для яких $\rho\tilde{c} = \infty$, на його поверхні $v_N|_S = 0$. В акустиці інколи розглядаються граничні умови третього роду для p : $p + w \frac{\partial p}{\partial N} = 0$. Поверхня, на якій ця умова виконується називається імпедансною. Коли $w = 0$ маємо граничну умову першого роду, що відповідає абсолютно м'якому тілу, коли ж $w = \infty$, то маємо граничну умову другого роду, що відповідає абсолютно жорсткому тілу.[3]

Список літератури: 1. Мендельброт Б. Фрактальна геометрія природи. М., ИКИ, 2002, 655с. 2. Кошевой Г.И. Некоторые классы самоподобных фракталов и их использование в радиофизике. // ЭВЭС, том 12, №11, 2007, с. 28-32. 3. Ваганов Б., Каценельбаум Б.З. Основы теории дифракции. М., Наука, 1982г., 272с. 4. Шестапов В.П., Литвиненко Л.Н. и др. Дифракция волн на решетках. Изд-во Харьковского университета, 1973, 287с. 5. Кошовий Г.І., Головченко О.В., Кошовий А.Г. Чисельно-аналітичне дослідження перед-фрактальних розсіювачів електромагнітних хвиль. // Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2006. №4 .-С. 133-137 . 6.Ланасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярних інтегральних уравнень в двумерних задачах дифракції. Киев. Наук. Думка, 1984, 343с.

Надійшла до редколегії 04.10.2010