УДК 517.929.7

В.П. ЛЯШЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, КНУ ім. М.Остроградського, Кременчук
В.А. ВАНІН, д-р. техн. наук, ІПМАШ ім. А.М.Підгорного,
проф. НТУ “ХПІ”, Харків

ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПОРОШКОВІЙ МЕТАЛУРГІЇ

Із єдиної точки зору розглянуті математичні моделі теплових процесів, які протікають під час спікання, пресування, відпалу і виробництва проволоки методами порошкової металургії. В якості математичних моделей використовуються початково-крайові для лінійного або нелінійного рівнянь теплопровідності. При розв’язанні задач по визначенню параметрів управління нагріванням розглядається нелокальна інтегральна умова. Запропоновані алгоритми розв’язання таких задач.

From the single point of view the mathematical models of thermal processes, which flow during sintering, pressing, annealing and wire production the methods of powder metallurgy, are considered. In basis of mathematical models nonlinear initially boundary problems are examined for linear or nonlinear equation of heat conductivity. At the problems for determination of actuating error heating a nonlocal integral condition is examined. The algorithms of solution of the formulated problems are offered.

1. Вступ. У порошковій металургії під час виробництва дроту та виробів іншого призначення широке застосування знаходять технологічні процеси термічної обробки рухомих та нерухомих об’єктів. Термічна обробка тут використовується як самостійна операція, так і в комплексі з пластичною деформацією [1-5]. Це викликано вимогами до якості кінцевого продукту. Тому поряд з пластичною деформацією застосовуються різні види термічної обробки як зовнішніми так і внутрішніми джерелами тепла [4,5]. Особливо важливе значення має термічна обробка, яка дозволяє формувати певні фізико-механічні властивості металів та композитних матеріалів. Окрім звичайних методів термічної обробки тут застосовується термоциклічна та імпульсна обробка, яка особливо ефективна під час отримання надтонкого дроту із застосуванням технології електропластичного деформування [4,5].

2. Аналіз публікацій по темі дослідження. У роботах [7-14] проведені дослідження теплових процесів, що відбуваються під час спікання порошкових матеріалів, різних видів їх термічної обробки, а також теплових процесів, що протікають під час волочіння дроту. Тут запропоновані математичні моделі, що описують температурні розподіли під час обробки рухомого дроту та виробів циліндричної форми. У якості математичних моделей розглядаються початково-крайові задачі для лінійного та квазілінійного рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат (r, z, φ, t). Особливостями таких моделей є те, що задачі, які лежать у їх основі, описують теплові процеси рухомого та нерухомого середовища за допомогою різних видів рівняння теплоровідності .

З математичної точки зору дослідження температурних розподілів рухомих та нерухомих осесиметричних об'єків можна вести розглядаючи різні початково-крайові задачі для одного лінійного або нелінійного рівняння теплопровідності, уводячи певні обмеження у рівняння та залучаючи відповідні крайові умови, що характеризують фізичні особливості процесу нагрівання. Оскільки більшість температурних розподілів, що виникають під час нагрівання виробів циліндричної форми не залежать від координати φ , то частинною похідною у рівнянні теплопровідності по цій змінній можна знехтувати. Дріт та інші вироби циліндричної форми розглядаються у вигляді рухомого або нерухомого циліндричного ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками та параметрами з довжиною зони нагрівання L. При цьому досліджуються математичні моделі температурних полів у яких діють як зовнішні так і внутрішні джерела тепла. Внутрішні джерела тепла $W\left(z,t,T\right)$ спричинені дією електричного струму, що пропускається через середовище або індукується у ньому, а зовнішні спричиняються теплообміном з навколишнім середовищем за законами Ньютона та Стефана-Больцмана. У математичній моделі – рівнянні теплопровідності – внутрішні джерела тепла зображаються у вигляді фінітної функції $W\left(z,t,T\right)$, а зовнішні – у вигляді граничних умов першого, другого або третього роду.

Розглядався вплив нелінійностей у крайових умовах на температурний розподіл.

3. Мета дослідження. Метою дослідження є зведення математичних моделей, що описують температурні поля під час спікання виробів, різних видів їх термічної обробки до дослідження початково-крайових задач для одного виду рівняння теплопровідності, у циліндричній області з діючими внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла та відповідними крайовими умовами, а також з залученням нелокальної інтегральної умови.

4. Основна частина. Математична модель температурного поля циліндричної області $\Omega\times t:\left\{0<r<r_0,\,0<z<L,\,t>0\right\}$, має вигляд однієї із крайових задач для наступного неоднорідного нестаціонарного нелінійного рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\left(T\right)r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+$$

$$+v\left(t\right)\frac{\partial T}{\partial z}-c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t}=-W\left(z,t,T\right) \qquad (1)$$

Якщо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(T)$ лінійно залежить від температури, то нелінійне рівняння (1) перетворенням Кирхгофа [6] можна звести до лінійного. Подальше спрощення рівняння, шляхом застосування інтегрального перетворення (усереднення по радіусу), можна проводити коли температурне поле не залежить від зміни радіуса r та розглядається друга або третя крайова задача по радіусу [8-11]. Таке інтегральне перетворення дозволяє зменшити розмірність рівняння. Якщо задача стаціонарна або квазістаціонарна, то ми приходимо до лінійної або нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку. У першому випадку задача допускає аналітичний розв'язок, а у другому розв'язок знаходиться чисельними методами.

Якщо досліджується температурне поле для рухомого середовища, що розігрівається постійно діючими внутрішніми джерелами тепла, то до рівняння (1) додаються наступні крайові умови

$$T(r,z,0)=T_0 \tag{2}$$

$$T(r,0,t)=T_1(t),\ T(r,L,t)=T_2(t) \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\ \lambda(T)\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}=\pm\left[\alpha f_2^i(t)\left(T_c-T\right)+\varepsilon\sigma f_2^i(t)\left(T_c^4-T^4\right)\right] \tag{4}$$

де $\alpha,\varepsilon,\sigma$ – коефіцієнт тепловіддачі, степінь чорноти та постійна Стефана-Больцмана, r_0 – радіус, $T_c>T_0$, функція $W(z,t,T)=f_1(T)f_2^i(t)$, $f_1(T)=\dfrac{I^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$, $f_2^i(t)=1$ [11-13]. У граничній умові (4) слід розгядати перед квадратними дужками знак мінус.

Коли ж рухоме середовище розігрівається одночасно постійно діючими внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла, то в умові (4) перед квадратними дужками слід розгядати знак плюс.

Математична модель, що описує температурне поле надтонкого дроту під час електропластичної обробки [11-13] відрізняється у своїй постановці від задачі (1)-(4) функцією $W(z,t,T)$ у рівнянні (1). Тут функції $f_1(T)$ та $f_2^i(t)$ мають вигляд

$$f_1(T)=\frac{I^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4},$$

$$f_2^1(z)=\begin{cases} m\dfrac{z}{l_0}-mn, \; nl_0 \le z \le \left(n+\dfrac{1}{m}\right)l_0 \\ 0, \; \left(n+\dfrac{1}{m}\right)l_0 \le z \le (n+1)l_0, \; z<0 \end{cases}, f_2^2(t)=\begin{cases} m\dfrac{t}{t_0}-mn, \; nt_0 \le t \le \left(n+\dfrac{1}{m}\right)t_0 \\ 0, \; \left(n+\dfrac{1}{m}\right)t_0 \le t \le (n+1)t_0, \; t<0 \end{cases}. \quad (5)$$

Аналітичні розв’язки спрощених задач та чисельні розв’язки задач (1)-(4), (5) отримано у роботі [12]. Побудовано графіки температурних розподілів.

У математичних моделей температурного поля нерухомої циліндричної області рівняння (1) не містить доданка з $\dfrac{\partial T}{\partial z}$. Тут $v(t)=0$. Тоді для процесу одноциклового відпалу з внутрішніми джерелами тепла маємо рівняння у області $\Omega \times t: \{0<r<r_0, 0<z<L, t>0\}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)-c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t}=-W(z,t,T), \quad (6)$$

у якому $W(z,t,T)=f_1(T)f_2^i(t)$, $f_1(T)=\dfrac{I^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$, $f_2^i(t)=1$.

Умови (2)-(4), що долучаються до цього ріняння відображають взаємодію поверхні нерухомого циліндра з навколишнім середовищем. Коли бічна поверхня циліндра втрачає тепло з поверхні, то у правій частині умови (4) слід поставити знак мінус.

Коли розглядається математична модель одноциклової термічної обробки зовнішніми джерелами тепла, то у рівнянні (1) слід покласти $v(t)=0$, $W(z,t,T)=0$. Циліндрична поверхня розігрівається за рахунок теплообміну через бічну поверхню. В умові (4), у правій частині слід поставити знак плюс перед квадратними дужками. Отримана крайова задача розв’язується чисельними методами з залученням однієї з неявних різницевих схем [15].

Окрім одноциклових відпалів застосовуються багатоциклові, так звана термоциклічна обробка [7,9]. Тут у крайових задачах, що відображають відповідні математичні моделі, функції $f_2^i(t)$ мають вигляд

$$f_2^3(t)=0,5\left(1-\cos\frac{t}{t_0}\right),\quad f_2^4(t)=\left|\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\right|,$$

$$f_2^5(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t_0}-2n, & 2nt_0<t<(2n+1)t_0,\\ -\dfrac{t}{t_0}+2(n+1), & (2n+1)t_0<t<(2n+2)t_0,\end{cases} \qquad (7)$$

t_0 – час одного термоциклу.

Розв'язки крайових задач, що моделюють процеси термоциклічної обробки навіть після застосування інтегрального перетворення по одній із координат можна отримати лише чисельними методами. Найбільш ефективним чисельним методом розв'язку таких задач є застосування неявних різницевіх схем, зокрема схеми Кранка-Ніколсона [15].

Після усереднення по радіусу задача для рівняння (6) розв'язується чисельним методом в скінчено мірному сепарабельному просторі з нормою $\|u(z,t)\|_U=\max\limits_{z,t\in\Omega}|u(z,t)|$. Кінцево-різницева схема Кранка-Ніколсона для рівняння (6) у області $\Omega\times t:\{0<z<L, t>0\}$ після введення рівномірної сітки по координатам z та t має вигляд системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для сіткової функції $u_{i,j}$.

$$c\rho_n\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}=\frac{\lambda}{2h^2}\Big(u_{i-1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}+ \\ +u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}\Big)+F\left(u_{i,j},t\right)$$

Отримана система розв'язується ітераційним методом.

У роботах [9,11] проведені чисельні розрахунки температурних розподілів для одноциклової та термоциклічної обробки виробів циліндричної форми.

Особливе місце при побудові математичних моделей теплових процесів під час спікання та термічної обробки має залучення до крайової задачі замість однієї із крайових умов або додатково нелокальної інтегральної умови

$$a_1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}\int\limits_0^{r_0}\left[T(z,t)-T_0\right]drdzd\varphi+a_2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L}\left[T(r,z)-T_c\right]dzd\varphi=a_3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}\int\limits_0^{r_0}\left[1+\beta T(z,t)\right]drdzd\varphi, \qquad (8)$$

де – $a_1, a_2, a_3 - const$.

Ця умова визначає баланс енергії зони нагрівання. Ліва частина співвідношення (8) визначає кількість тепла, яке пішло на підвищення температури області та втрат через поверхню, а права частина – кількість виділеного джерелами тепла в області Ω. Якщо всі параметри математичної моделі вірно відображають фізичний процес, то маємо теплову рівновагу (ліва частина рівняння (8) буде дорівнювати правій), а якщо один із параметрів визначено або закладено у модель невірно, то будемо мати нерівність. Ця нерівність визначає нев'язку між реально існуючим температурним розподілом та визначеним за допомогою аналітичного або чисельного розрахунку температурного розподілу зони нагрівання. За величиною нев'язки визначається параметр керуванння температурним полем, що встановлює термодинамічну рівновагу між виділеною та затраченою енергією.

5. Висновки. Запропоновані математичні моделі можуть знайти широке застосування під час розрахунків температурних полів у зоні нагрівання рухомих та нерухомих осесиметричних середовищ. Аналіз отриманих моделей дозволяє визначати параметри керування температурними полями та проектувати системи управління ними. Залучення нелокальної інтегральної умови дозволяє з енергетичної точки зору більш точно ніж розв'язки крайових задач оцінювати температурні розподіли та відповідність розрахункових розподілів реально існуючим вимірам значень температур інструментальними методами.

Список літератури: **1.** *Кипарисов С.С.* Порошковая металлургия / *С.С. Кипарисов, Г.А. Либенсон.* – М.: Металлургия, 1972. – 527 с. **2.** *Крупин А.В., Соловьев В.Я.* Пластическая деформация тугоплавких металлов. – М.: Металлургия, 1971. – 350 с. **3.** *Новиков И.И.* Теория термической обработки металлов. – М.: Металлургия, 1978. – 392 с. **4.** *Федюкин В.К., Смагоринский М.Е.* Термоциклическая обработка металлов и деталей машин. – Л.: Машиностроение. Ленинград. отд-ние, 1989. – 255 с. **5.** *Спицын В.И.* Электропластическая деформация металлов / *В.И. Спицын, О.А. Троицкий.* – М.: Наука, 1985. – 160 с. **6.** *Березовский А.А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики Ч.1,2. – К.: Наукова думка, 1976. – 292 с. **7.** *Ляшенко В.П.* Математическое моделирование процессов твердо-фазного спекания и отжига // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Вісник 6/2002(17). – С. 30-33. **8.** *Ляшенко В.П., Кирилаха Н.Г. и др.* Modeling and automation of temperature processes in powder metallurgy // Вестник национального технического университета «ХПИ». – Вып. 6/2007. – Харьков:ХПИ, 2007. – С. 35-41. **9.** *Ляшенко В.П., Григорова Т.А.* Моделювання процесів пресування та спікання порошкових матеріалів // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фіз.-мат. науки №1. – Запоріжжя, 2008. – С. 124-130. **10.** *Троицкий О.А., Ляшенко В.П. и др.* Электропластическая деформация вольфрама // М.: ДАН СССР, 1987. – Т. 295, №5. – С. 251-255. **11.** *Григорова Т.А.* Чисельні алгоритми розв'язку крайової задачі для рівняння теплопровідності // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Вісник 6/2009(59), ч.1. – С. 11-14. **12.** *Ляшенко В.П., Кобильська О.Б.* Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фіз.-мат. науки, 2008. – №1. – С. 130-136. **13.** *Ляшенко В.П., Кобильська О.Б.* Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. – Вип. 13. – №890. – 2010. – С. 115-121. **14.** *Троицкий О.А.* Ультразвуковое электропластическое плющение металла / *О.А. Троицкий* // Вестник научно-технического развития. – М., 2009. – № 10 (26). – С. 42-49. **15.** *Андерсон Д.,Таннехилл Дж. и др.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

Надійшла до редколегії 06.09.2010