УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач, НТУ «ХПІ», Харків

ВІДНОВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЩО МАЮТЬ РІЗНУ ЩІЛЬНІСТЬ

В роботі запропонований загальний метод побудови розривних інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, які як частинний випадок включають в себе розривні та неперервно-диференційовні сплайни. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні та апроксимаційні властивості таких розривних конструкцій.

In work the general method of construction explosive interlineational polinomial splines which as a special case include explosive and is continuous-differentiated splines is developed. Theorems about intarlineational and approximational properties such explosive designs are formulated and proved.

1. Вступ. Задачі двовимірної, тривимірної та чотиривимірної комп'ютерної томографії були розглянуті детально в роботах [1,2]. Були проведені обчислювальні експерименти на прикладі головного мозку людини та рухомого серця людини. В якості вхідних даних виступали томограми, які поступають з реально діючого комп'ютерного томографу. Але в розроблених методах вважалося, що ми маємо справу з неперервними об'єктами. Насправді в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин, підшлункова залоза має свою форму та щільність тканин, хребет має свою щільність тощо). Тобто маємо справу з розривними об'єктами.

На даний час основна увага в теорії наближення функцій багатьох змінних сплайнами приділена наближенню неперервних і диференційованих функцій неперервними та диференційованими сплайнами. В той же час практика показує, що серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується розривними функціями. В роботі [3] запропоновано використовувати для більш точного опису внутрішньої структури 3D тіла апріорну інформацію про його частини за допомогою відповідних функцій трьох змінних, які входять у рівняння $W_k(x,y,z)=0,\ k=\overline{1,M},$ що описують M - кількість об'єктів внутрішньої структури тіла з метою більш якісного їх відновлення методами комп'ютерної томографії. Тобто в цьому методі пропонується використовувати інформацію про внутрішню структуру тіла у вигляді розривної функції трьох змінних, яка має розриви в точках поверхонь, що відділяють сусідні підобласті.

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Наприклад, в роботі [4] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структур тіла.

Крім того, наведемо наступний приклад. В механіці твердого тіла однією із складних задач є задача дослідження тріщин у внутрішніх точках тіла, тобто таких включень у внутрішніх точках тіла , в яких відсутній матеріал, з якого складається тіло. Можна сказати, що таке тіло має щільність, яка є розривною: за межами тріщини одна щільність, в області, обмеженою стінками тріщини – інша щільність.

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

Перший крок до розв'язання цієї задачі був зроблений в роботі [5], в якій був розроблений метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, використовуючи метод мінімакса.

Дана робота присвячена узагальненню результатів роботи [5] на випадок наближення розривної функції двох змінних за допомогою розривних сплайнів двох змінних для випадку, коли розриви першого роду наближуваної функції та розриви першого роду наближуючих сплайнів розміщені в точках прямих, паралельних осям координат. Будемо вважати, що область наближення повністю розміщена в квадраті $D=[0,1]\times[0,1]$.

2. Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області D. Припустимо, що область D розбивається прямими $x_0=0<x_1<x_2<...<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<...<y_n=1$ на прямокутні елементи $\Pi_{ij}=(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Функція $f(x,y)$ та її похідні до $\rho-1$ порядку мають розриви першого роду на границі між цими прямокутними елементами (не обов'язково між всіма елементами). Потрібно побудувати розривний сплайн такий, щоб виконувалися інтерлінаційні та апроксимативні властивості.

3. Опис методу наближення. Введемо позначення $\varphi 1_i^+(y)=\lim\limits_{x\to x_i+0} f(x,y)$, $\varphi 1_i^-(y)=\lim\limits_{x\to x_i-0} f(x,y)$ – сліди функції $f(x,y)$ на прямих $x=x_i$, $i=\overline{1,m}$. Якщо $\varphi 1_i^+(y)=\varphi 1_i^-(y)$, то функція $f(x,y)$ є неперервною на лінії $x=x_i$, в протилежному випадку, вона має розрив на заданій лінії.

Розглянемо елемент $\Pi_{ij}=(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Означення. Будемо називати розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в області D відповідним заданому розбиттю на підобласті Π_{ij} наступну функцію:

$$S(x,y) = S_{ij}(x,y),\ (x,y)\in\Pi_{ij},$$
$$S_{ij}(x,y) = S1_{ij}(x,y) + S2_{ij}(x,y) - S12_{ij}(x,y), \qquad (x,y)\in\Pi_{ij}\subset D, \quad (1)$$

де

$$S1_{ij}(x,y) = S1_{ij}(x,y;\{\varphi1_{i-1,s}(y)\};\{\varphi1_{i,s}(y)\}, s=\overline{0,\rho-1}) =$$
$$= \sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{+}{}_{i-1,s}(y)\cdot h1_{i-1,s}(x) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{-}{}_{i,s}(y)\cdot h1_{i,s}(x);$$
$$S2_{ij}(x,y) = S2_{ij}(x,y;\{\varphi2_{j-1,p}(x)\};\{\varphi2_{j,p}(x)\}, p=\overline{0,\rho-1}) =$$
$$= \sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{+}{}_{j-1,p}(x)\cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{-}{}_{j,p}(x)\cdot h2_{j,p}(y);$$
$$S12_{ij}(x,y) = S12_{ij}(x,y;\{\varphi1_{i-1,s}(y)\};\{\varphi1_{i,s}(y)\}, s=\overline{0,\rho-1},$$
$$\{\varphi2_{j-1,p}(x)\};\{\varphi2_{j,p}(x)\}, p=\overline{0,\rho-1}) =$$
$$= \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s,p}h1_{i-1,s}(x)h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s,p}h1_{i-1,s}(x)h2_{j,p}(y) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{-+}_{i,j-1,s,p}h1_{i,s}(x)h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{--}_{i,j,s,p}h1_{i,s}(x)h2_{j,p}(y),$$

$h1_{k,s}(x), h2_{l,p}(y)$ - базисні поліноми Ерміта степеня $2\rho-1$ з властивостями:

$$h1^{(s')}{}_{k,s}(x_{k'}) = \delta_{k,k'}\delta_{s,s'},\ k,k'\in\{i-1,i\}, s,s'\in\{0,\rho-1\}$$
$$h2^{(p')}{}_{l,p}(y_{l'}) = \delta_{l,l'}\delta_{p,p'}, l,l'\in\{j-1,j\}, p,p'\in\{0,\rho-1\}$$

Теорема 1. Якщо

$$\left(\varphi1^{+}{}_{i,s}(y_j)\right)^{(p)} = \left(\varphi2^{+}{}_{j,p}(x_i)\right)^{(s)} = C^{++}{}_{ijsp},$$
$$\left(\varphi1^{-}{}_{i,s}(y_j)\right)^{(p)} = \left(\varphi2^{+}{}_{j,p}(x_i)\right)^{(s)} = C^{-+}{}_{ijsp},\ \left(\varphi1^{-}{}_{i,s}(y_j)\right)^{(p)} = \left(\varphi2^{-}{}_{j,p}(x_i)\right)^{(s)} = C^{--}{}_{ijsp},$$
$$\left(\varphi1^{+}{}_{i,s}(y_j)\right)^{(p)} = \left(\varphi2^{-}{}_{j,p}(x_i)\right)^{(s)} = C^{+-}{}_{ijsp},$$

то на границі прямокутника Π_{ij} функція $S_{ij}(x,y)$ задовольняє наступним співвідношенням

$$\left.\frac{\partial^{s'} S_{ij}(x,y)}{\partial x^{s'}}\right|_{x=x_{i-1}} = \varphi 1^{+}_{i-1,s'}(y),$$

$$\left.\frac{\partial^{s'} S_{ij}(x,y)}{\partial x^{s'}}\right|_{x=x_{i}} = \varphi 1^{-}_{i,s'}(y),\; y_{j-1} \le y \le y_j,\; s' = \overline{0,\rho-1} \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{p'} S_{ij}(x,y)}{\partial y^{p'}}\right|_{y=y_{j-1}} = \varphi 2^{+}_{j-1,p'}(x),$$

$$\left.\frac{\partial^{p'} S_{ij}(x,y)}{\partial y^{p'}}\right|_{y=y_{j}} = \varphi 2^{-}_{j,p'}(x), x_{i-1} \le x \le x_i,\; p' = \overline{0,\rho-1} \tag{3}$$

Доведення. Підставимо у формулу (1) $x = x_{i-1}$. В результаті отримаємо:

$$S_{ij}(x_{i-1},y) = S1_{ij}(x_{i-1},y) + S2_{ij}(x_{i-1},y) - S12_{ij}(x_{i-1},y), =$$
$$= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^{+}{}_{i-1,s}(y)\cdot h1_{i-1,s}(x_{i-1}) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^{-}{}_{i,s}(y)\cdot h1_{i,s}(x_{i-1}) +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y) -$$
$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{++}_{i-1,j-1,s,p} h1_{i-1,s}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{+-}_{i-1,j,s,p} h1_{i-1,s}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) +$$
$$+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{-+}_{i,j-1,s,p} h1_{i,s}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{--}_{i,j,s,p} h1_{i,s}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) =$$
$$= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^{+}{}_{i-1,s}(y)\cdot \delta_{i-1,i-1}\delta_{s,0} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^{-}{}_{i,s}(y)\cdot \delta_{i,i-1}\delta_{s,0} +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y) -$$
$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{++}_{i-1,j-1,s,p} \delta_{i-1,i-1}\delta_{s,0} h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{+-}_{i-1,j,s,p} \delta_{i-1,i-1}\delta_{s,0} h2_{j,p}(y) +$$
$$+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{-+}_{i,j-1,s,p} \delta_{i,i-1}\delta_{s,0} h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1} C^{--}_{i,j,s,p} \delta_{i,i-1}\delta_{s,0} h2_{j,p}(y) =$$

$$= \varphi 1^{+}{}_{i-1,0}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) -$$

$$- \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{++}_{i-1,j-1,0,p} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{+-}_{i-1,j,0,p} h2_{j,p}(y) =$$

$$= \left| \begin{matrix} C^{++}_{i-1,j-1,0,p} = \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x_{i-1}) \\ C^{+-}_{i-1,j,0,p} = \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x_{i-1}) \end{matrix} \right| =$$

$$= \varphi 1^{+}{}_{i-1,0}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) -$$

$$- \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) = \varphi 1^{+}{}_{i-1,0}(y)$$

Таким чином, ми довели, що

$$S_{i,j}(x_{i-1}, y) = \varphi 1^{+}{}_{i-1,0}(y),\ y_{j-1} \le y \le y_j .$$

Аналогічно доводяться рівності, коли у формулу (1) підставляємо $x = x_i,\ y = y_{j-1},\ y = y_j$.

Припустимо, що $1 \le s' \le \rho - 1$. В результаті отримаємо:

$$\left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x,y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \left. \frac{\partial^{s'} S1_{ij}(x,y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} + \left. \frac{\partial^{s'} S2_{ij}(x,y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} - \left. \frac{\partial^{s'} S12_{ij}(x,y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^{+}{}_{i-1,s}(y) \cdot \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i-1,s}(x) \right|_{x=x_{i-1}} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^{-}{}_{i,s}(y) \cdot \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i,s}(x) \right|_{x=x_{i-1}} +$$

$$\sum_{p=0}^{\rho-1} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x) \right|_{x=x_{i-1}} \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x) \right|_{x=x_{i-1}} \cdot h2_{j,p}(y) -$$

$$- \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{++}_{i-1,j-1,s,p} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i-1,s}(x) \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j-1,p}(y) -$$

$$- \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{+-}_{i-1,j,s,p} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i-1,s}(x) \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j,p}(y) -$$

$$- \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{-+}_{i,j-1,s,p} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i,s}(x) \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j-1,p}(y) +$$

$$+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{--}_{i,j,s,p}\left.\frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}}h1_{i,s}(x)\right|_{x=x_{i-1}}h2_{j,p}(y)=$$

$$=\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{+}{}_{i-1,s}(y)\cdot\delta_{i-1,i-1}\delta_{s',s}+\sum_{s=0}^{\rho-1}\varphi1^{-}{}_{i,s}(y)\cdot\delta_{i,i-1}\delta_{s',s}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{+(s')}{}_{j-1,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}\varphi2^{-(s')}{}_{j,p}(x_{i-1})\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s,p}\delta_{i-1,i-1}\delta_{s',s}h2_{j-1,p}(y)-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s,p}\delta_{i-1,i-1}\delta_{s',s}h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{-+}_{i,j-1,s,p}\delta_{i,i-1}\delta_{s',s}h2_{j-1,p}(y)+\sum_{s=0}^{\rho-1}\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{--}_{i,j,s,p}\delta_{i,i-1}\delta_{s',s}h2_{j,p}(y)=$$

$$=\left|C^{++}_{i-1,j-1,s',p}=\varphi2^{+(s')}{}_{j-1,p}(x_{i-1})\right|=$$

$$=\varphi1^{+}{}_{i-1,s'}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s',p}\cdot h2_{j-1,p}(y)+\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{-+}_{i-1,j,s',p}\cdot h2_{j,p}(y)-$$

$$-\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{++}_{i-1,j-1,s',p}h2_{j-1,p}(y)-\sum_{p=0}^{\rho-1}C^{+-}_{i-1,j,s',p}h2_{j,p}(y)=\varphi1^{+}{}_{i-1,s'}(y)\ .$$

Аналогічно доводяться властивості (2) при $x=x_i$ та властивості (3).
Теорема 1 доведена.
Теорема 2. Якщо

$$\varphi1^{-}_{i,s}(y)=\varphi1^{+}_{i,s}(y)=\varphi1_{i,s}(y)\ ,\ s=\overline{0,\mu},0\le\mu\le\rho-1\ ,$$

$$\varphi2^{-}_{j,p}(x)=\varphi2^{+}_{j,p}(x)=\varphi2_{j,p}(x)\ ,\ p=\overline{0,\nu},0\le\nu\le\rho-1\ ,$$

то функція $S(x,y)=S_{ij}(x,y),\ (x,y)\in\Pi_{ij}$ буде мати такі властивості:

$$S(x,y)\in C^{\mu,\nu}(D)\,.$$

$$\left.\frac{\partial^{s'}S(x,y)}{\partial x^{s'}}\right|_{x=x_i}=\varphi1_{i,s'}(y),\ \ i=\overline{1,m},\ s'=\overline{0,\mu},\ y_{j-1}\le y\le y_j\,, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{p'}S(x,y)}{\partial y^{p'}}\right|_{y=y_j}=\varphi2_{j,p'}(x),\ \ j=\overline{1,n},\ p'=\overline{0,\nu},\ x_{i-1}\le x\le x_i \tag{5}$$

Доведення витікає з того, що якщо функції $\varphi1_{i,s}(y)\in C^{\rho-1}[x_{i-1},x_i],\ \varphi2_{j,p}(x)\in C^{\rho-1}[y_{j-1},y_j]$, то в кожному елементі Π_{ij} функція $S_{ij}(x,y)$ буде належати класові $C^{\rho-1,\rho-1}(\Pi_{ij})$. Таким чином функція $S(x,y)$ в кожному з елементів Π_{ij} належить до класу $C^{\rho-1,\rho-1}(\Pi_{ij})$ і на границі між сусідніми з Π_{ij} елементами зберігає неперервність похідних до порядків μ, ν відповідно, оскільки доведення властивостей (4), (5) проводиться по аналогії з доведенням властивостей в в теоремі 1.

Теорема 2 доведена.

Зауваження 1. Таким чином, якщо умови теореми 2 виконуються, то функція $S(x,y)$ має розривні частинні похідні порядків більших, ніж μ по x та більших, ніж ν по y відповідно.

Зауваження2. В принципі припускається, що розриви функції $S(x,y)$ та її частинних похідних до відповідних порядків можуть існувати лише на границях одного або декількох елементів.

Теорема 3. Якщо функції $\varphi 1^{+}{}_{i,s}(y), \varphi 1^{-}{}_{i,s}(y)$ є поліномами (взагалі кажучи, різними) степеня $Q \geq 2\rho - 1$ і функції $\varphi 2^{+}{}_{j,p}(x), \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x)$ є поліномами (взагалі кажучи, різними) степеня $Q \geq 2\rho - 1$, то функція $S(x,y)$ буде кусково-поліноміальним розривним сплайном, який є поліномом від двох змінних на кожному прямокутнику $\Pi_{ij} \subset D$. Зокрема, якщо $Q = 2\rho - 1$, то $S(x,y)$ буде розривним кусково-поліноміальним сплайном від (x,y) степеня $2\rho - 1$ по кожній змінній.

Доведення витікає з того, що функції $S_{ij}(x,y)$ використовують поліноміальні базисні функції Ерміта і у припущеннях теореми 3 будуть поліномами. Якщо $Q = 2\rho - 1$, то $S_{ij}(x,y)$ буде поліномом степеня $2\rho - 1$ за кожною змінною. Якщо при цьому не виконуються умови теореми 2, то така функція $S_{ij}(x,y)$ буде мати розриви між різними елементами.

Теорема 3 доведена.

Зауваження 3. Ще раз підкреслимо, що ці розриви не обов'язково можуть бути на границі між всіма елементами. Більш того, не вимагається, щоб на всіх чотирьох сторонах кожного елемента сплайн мав розривні похідні порядків $\mu+1,\ \mu+2,...,\rho-1$ та $\nu+1, \nu+2,...,\rho-1$ по x та y відповідно.

Теорема 4. Припустимо, що наближувана функція $f(x,y) \in C^{\rho-1,\rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$ і $\varphi 1^{+}{}_{i-1,s}(y) \neq \varphi 1^{-}{}_{i,s}(y),\ \varphi 2^{+}{}_{j-1,p}(x) \neq \varphi 2^{-}{}_{j,p}(x),\ s,p = \overline{0,\rho-1}$. Тоді, якщо у $S(x,y)$ покласти

$$\varphi 1^{-}_{i',s}(y) = \varphi 1^{+}_{i',s}(y) = f^{(s',0)}(x_{i'},y),\ i' \in \{0,1,...,m\},\ i' \neq i-1,\ i' \neq i,\ 0 \leq y \leq 1,$$

$$\varphi 2^{-}_{j',p}(x) = \varphi 2^{+}_{j',p}(x) = f^{(0,p)}(x,y_{j'}),\ j' \in \{0,1,...,n\}, j' \neq j-1, j' \neq j,\ 0 \leq x \leq 1$$

$$\varphi 1^{-}{}_{i-1,s}(y) = \varphi 1^{+}{}_{i-1,s}(y) = f^{(s,0)}(x_{i-1},y),\ 0 \leq y \leq y_{j-1} \text{ або } y_j \leq y \leq 1,$$

$$\varphi 2^{-}_{j-1,p}(x) = \varphi 2^{+}_{j-1,p}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j-1}),\ 0 \le x \le x_{i-1} \text{ або } x_i \le x \le 1,$$

$$\varphi 1^{+}_{i-1,s}(y) = f^{(s,0)}(x_{i-1}+0, y),\ \varphi 1^{-}_{i,s}(y) = f^{(s,0)}(x_i - 0, y)$$

$$\varphi 1^{-}_{i-1,s}(y) = f^{(s,0)}(x_{i-1}-0, y),\ \varphi 1^{+}_{i,s}(y) = f^{(s,0)}(x_i + 0, y),$$

$$\varphi 2^{+}_{j-1,p}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j-1}+0),\ \varphi 2^{-}_{j,p}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j - 0)$$

$$\varphi 2^{-}_{j-1,p}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j-1}-0),\ \varphi 2^{+}_{j,p}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j + 0),$$

то отримана функція $S(x,y)$ буде належати до класу $C^{\rho-1,\rho-1}(D)$ і буде розривною разом із своїми похідними до порядку $\rho-1$ за кожною змінною лише на границі елемента Π_{ij}.

Доведення витікає з того, що на границі між всіма елементами (за виключенням елемента Π_{ij}) функція $S(x,y)$ буде мати неперервні похідні до порядку $\rho-1$ включно і лише на границі елемента Π_{ij} може бути розривною разом із своїми частинними похідними. Тобто така функція буде належати класу $S(x,y) \in C^{\rho-1,\rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$.

Теорема 4 доведена.

Теорема 5. Якщо виконуються умови теореми 4, то для похибки наближення такої розривної функції $f(x,y)$ відповідним розривним інтерлінаційним сплайном $S(x,y)$ буде виконуватись співвідношення:

$$\left| f(x,y) - S(x,y) \right| = O(\Delta 1^{2\rho} \Delta 2^{2\rho}),\ (x,y) \in \Pi_{kl} \neq \Pi_{i,j},$$

$$\Delta 1 = \max_k (x_k - x_{k-1}),\ \Delta 2 = \max_l (y_l - y_{l-1})$$

$$\left| f(x,y) - S(x,y) \right| = O(\Delta i^{2\rho} \Delta j^{2\rho}),\ (x,y) \in \Pi_{i,j},$$

$$\Delta i = x_i - x_{i-1},\ \Delta j = y_j - y_{j-1},\ (i,j) \neq (k,l)$$

при умові, що $f(x,y) \in C^{\rho-1,\rho-1}(\Pi_{i,j})$.

Доведення. Оператор $S_{ij}(x,y) = S_{ij} f(x,y)$ згідно з означенням 1 може бути записаний у вигляді

$$S_{ij} f(x,y) = S1_{ij} f(x,y) + S2_{ij} f(x,y) - S12_{ij} f(x,y).$$

Згідно з теоремою 3.2.1 роботи [3] залишок наближення формулами інтерлінації виражається як операторний добуток залишків наближення функції $f(x,y)$ операторами $S1_{ij} f(x,y)$ та $S2_{ij} f(x,y)$

$$RS_{ij} f(x,y) = (f(x,y) - S_{ij} f(x,y)) =$$

$$= (f(x,y) - S1_{ij} f(x,y) - S2_{ij} f(x,y) + S12_{ij} f(x,y)) =$$

$$= (f(x,y) - S1_{ij} f(x,y))(f(x,y) - S2_{ij} f(x,y)) = RS1_{ij} f(x,y) RS2_{ij} f(x,y).$$

В цьому випадку оцінка похибки витікає з наслідку 3 до теореми 3.2.2 роботи [3].

Теорема 5 доведена.

Приклад. Нехай $\rho=1,\ m=2,\ n=2$. Задамо вузли: $x_0=0,\ x_1=0.5,$ $x_2=1,\quad y_0=0,\ y_1=0.5, y_2=1$.

Тобто область визначення наближуючої функції (рис.1) складається з чотирьох прямокутних елементів, які задаються наступним чином:

$$\Pi_{11}=\{(x,y): x_0<x<x_1, y_0<y<y_1\},\ \Pi_{12}=\{(x,y): x_0<x<x_1, y_1<y<y_2\},$$
$$\Pi_{21}=\{(x,y): x_1<x<x_2, y_0<y<y_1\},\ \Pi_{11}=\{(x,y): x_1<x<x_2, y_1<y<y_2\}$$

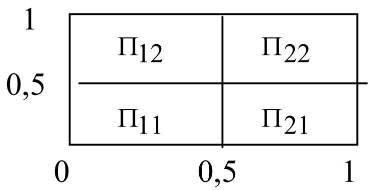

Рисунок 1 – Область визначення наближуваної функції $f(x,y)$.

Задамо функцію $f(x,y)$ в кутових точках елементів Π_{ij} наступним чином:

$$\Pi_{11}: f^{+,+}(0;0)=f(0+0;0+0)=1$$
$$f^{+,-}(0;0.5)=f(0+0;0.5-0)=2$$
$$f^{-,-}(0.5;0.5)=f(0.5-0;0.5-0)=1$$
$$f^{-,+}(0.5;0)=f(0.5-0;0+0)=2$$
$$\Pi_{12}: f^{+,+}(0;0.5)=f(0+0;0.5+0)=1$$
$$f^{+,-}(0;1)=f(0+0;1-0)=2$$
$$f^{-,-}(0.5;1)=f(0.5-0;1-0)=1$$
$$f^{-,+}(0.5;0.5)=f(0.5-0;0.5+0)=2$$
$$\Pi_{22}: f^{+,+}(0.5;0.5)=f(0.5+0;0.5+0)=3$$
$$f^{+,-}(0.5;1)=f(0.5+0;1-0)=4$$
$$f^{-,-}(1;1)=f(1-0;1-0)=3$$
$$f^{-,+}(1;0.5)=f(1-0;0.5+0)=4$$

$$\Pi_{21}: f^{+,+}(0.5;0) = f(0.5+0;0+0) = 3$$

$$f^{+,-}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5-0) = 4$$

$$f^{-,-}(1;0.5) = f(1-0;0.5-0) = 3$$

$$f^{-,+}(1;0) = f(1-0;0+0) = 4$$

Розривний сплайн будемо будувати у вигляді:

$$S(x,y) =$$

$$= \begin{cases} f^{+,+}(0;0)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(0.5;0)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ \quad + f^{+,-}(0;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} + \\ \quad + f^{-,-}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}, & (x,y)\in\Pi_{11} \\ f^{+,+}(0;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ \quad + f^{+,-}(0;1)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} + \\ \quad + f^{-,-}(0.5;1)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}, & (x,y)\in\Pi_{12} \\ f^{+,+}(0.5;0)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(1;0)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ \quad + f^{+,-}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} + \\ \quad + f^{-,-}(1;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}, & (x,y)\in\Pi_{21} \\ f^{+,+}(0.5;0.5)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(1;0.5)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ \quad + f^{+,-}(0.5;1)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} + \\ \quad + f^{-,-}(1;1)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}, & (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases} =$$

$S(x,y)=$

$$=\begin{cases} 1\cdot\frac{x-0.5}{-0.5}\frac{y-0.5}{-0.5}+2\cdot\frac{x}{0.5}\frac{y-0.5}{-0.5}+2\cdot\frac{x-0.5}{-0.5}\frac{y}{0.5}+1\cdot\frac{x}{0.5}\frac{y}{0.5}, & (x,y)\in\Pi_{11}\\ 1\cdot\frac{x-0.5}{-0.5}\frac{y-1}{0.5-1}+2\cdot\frac{x-1}{0.5-1}\frac{y-1}{0.5-1}+2\cdot\frac{x-0.5}{-0.5}\frac{y-0.5}{1-0.5}+ & \\ \qquad +1\cdot\frac{x}{0.5}\frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x,y)\in\Pi_{12}\\ 3\cdot\frac{x-1}{0.5-1}\frac{y-0.5}{-0.5}+4\cdot\frac{x-0.5}{1-0.5}\frac{y-0.5}{-0.5}+4\cdot\frac{x-1}{0.5-1}\frac{y}{0.5}+3\cdot\frac{x-0.5}{1-0.5}\frac{y}{0.5}, & (x,y)\in\Pi_{21}\\ 3\cdot\frac{x-1}{0.5-1}\frac{y-1}{0.5-1}+4\cdot\frac{x-0.5}{1-0.5}\frac{y-1}{0.5-1}+4\cdot\frac{x-1}{0.5-1}\frac{y-0.5}{1-0.5}+ & \\ \qquad +3\cdot\frac{x-0.5}{1-0.5}\frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x,y)\in\Pi_{22}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 4\cdot(x-0.5)(y-0.5)-8\cdot x(y-0.5)-8\big(x-0.5\big)y+4xy, & (x,y)\in\Pi_{11}\\ 4(x-0.5)(y-1)+8(x-1)(y-1)-8(x-0.5)(y-0.5)+4x(y-0.5, & (x,y)\in\Pi_{12}\\ 12(x-1)(y-0.5)-16(x-0.5)(y-0.5)-12(x-1)y+12(x-0.5)y, & (x,y)\in\Pi_{21}\\ 12(x-1)(y-1)-16(x-0.5)(y-1)-16(x-1)(y-0.5)+ & \\ \qquad +12(x-0.5)(y-0.5), & (x,y)\in\Pi_{22}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x,y)\in\Pi_{11}\\ -10x-6y+8+8xy, & (x,y)\in\Pi_{12}\\ -4xy+2x+2y+2\ \ , & (x,y)\in\Pi_{21}\\ -8xy+6x+6y-1, & (x,y)\in\Pi_{22}\end{cases}.$$

Як бачимо, функція $S(x,y)$ на границі між елементами Π_{11} і Π_{21} при $x<x_1$ буде мати наступні сліди:

$$S(x,y)=S(x_1-0,y)=S_{11}(x_1,y)=$$
$$=f^{-,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{-,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1.$$

Аналогічно

$$S(x,y)=S(x_1+0,y)=S_{21}(x_1,y)=$$
$$=f^{+,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{+,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1.$$

Тобто якщо $f^{-,+}(0.5,0) \neq f^{+,+}(0.5,0)$, то в точці $(0.5;0)$ такий сплайн буде розривним. Крім того, якщо в точці $f^{+,+}(0.5;0.5) \neq f^{+,-}(0.5;0.5)$, то сплайн буде розривним на всій лінії $x = 0.5$, $y_0 \leq y \leq y_1$.

Задамо наближувану функцію у вигляді

$$f(x,y) = S_{ij}(x,y) + \frac{(x-x_{i-1})(x_i - x)(y-y_{j-1})(y_j - y)}{4}, (x,y) \in \Pi_{i,j}, i,j = 1,2 .$$

Таким чином, в кожному з чотирьох елементів задання наближувана функція має частинну похідну $f^{2,2}(x,y) \equiv 1$, $\forall (x,y) \in \Pi_{ij}$. Тому, згідно з теорією, похибка наближення такої розривної функції, написаним вище розривним сплайном, буде задовольняти нерівності:

$$\max_{(x,y)\in\Pi_{ij}} \left| f(x,y) - S_{i,j}(x,y) \right| \leq f^{(2,2)}(\xi,\eta) \cdot \frac{\Delta i^2 \Delta j^2}{2! \cdot 2!} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2! \cdot 2!} = \frac{1}{64} \approx 0.016$$

4. Висновки. Таким чином, в даній статті запропоновано загальний метод побудови розривних сплайн-інтерлінантів, які як частинний випадок включають в себе розривні сплайни та неперервно-диференційовні до порядку за кожною змінною сплайни. Сформульовано і доведено теореми про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій та апроксимативні їх властивості. Зокрема, з цих властивостей витікає наступна точка зору: розривні в деяких точках або на деяких лініях функції від двох змінних краще наближувати розривними сплайн-інтерлінантами. При цьому можна отримати однаково високі оцінки похибки наближення в кожному елементі розбиття, притаманні неперервно-диференційовним сплайн-інтерлінантам.

Наступним кроком планується розробка теорії розривних сплайн-інтерлінантів на областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих.

Список літератури: **1.** Сергієнко І.В., Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій. Монографія. – Харків: ХНУРЕ, 2008.–160с.; **2.** *Першина Ю.І.* 4D математична модель 3D тіла в комп'ютерній томографіїі // Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXV): Праці міжнародного сімпозіуму (24-29 вересня 2009р.). – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. – Т.2. – С.188 – 193; **3.** *Литвин О.М., Литвин О.О.* Про один метод розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії // Тезисы докладов Международной конференции АППММ'06. – Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. – 2006. – С.18; **4.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 504с.; **5.** *Литвин О.М.*, Першина Ю.І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. – Інформатика та системні науки (ІСН-2010): матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції 18-20 березня 2010р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О.О.– Полтава, -2010р. – С.111-113.

Надійшла до редколегії 06.10.2010