УДК 593.3

Е.Ю. ТАРСИС, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ», Харьков

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ В МЕТОДЕ R – ФУНКЦИЙ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Вплив геометричних параметрів на напружено-деформований стан двошарового пружного тіла з неідеальним контактом між шарами, аналізується за допомогою метода R-функцій на базі варіаційного принципу Рейснера з врахуванням точних розв’язків.

Influence of geometrical parameters on the stress-strain state of two-layered elastic body with nonideal contact between layers is analyzed by using R-function method based on variational Reissner´s principle. The structures of solutions with using of exact solutions are build.

Цель исследований и постановка задачи. Целью данной работы является анализ напряженно-деформированного состояния, возникающего при контактном взаимодействии упругих частей составного тела конечных размеров, соединенных посредством натяга при изменении их геометрических параметров. Решение контактной задачи осуществляется в рамках метода R-функций на базе вариационного принципа Рейсснера [1] с использованием точных решений для бесконечной внешней области. Методика построения структурной модели приведена в работе [2]. Построенные структуры точно удовлетворяют всем граничным и контактным условиям задачи. Напомним, что методика предусматривает суперпозицию двух решений. Первое из них является решением этой же задачи для бесконечной внешней области, второе – отвечает телу конечных размеров. При этом на внешнем контуре задаются нагрузки, которые компенсируют напряжения первого решения, а натяг на внутреннем контуре отсутствует.

В данной работе рассмотрены два варианта конечных геометрических форм внешней границы $\partial\Omega_{(2)}$ (см. рис. 1). Для описания геометрии контактирующих областей введем следующие опорные области:

$$\Omega_1 = \left[f_1 = \frac{f_1^*}{\sqrt{\left(f_1^*\right)^2 + |\nabla f_1^*|^2}} \geq 0 \right], \text{ где } f_1^* = -x^2 - y^2 + R^p \text{ для варианта 1,}$$

$$\Omega_1 = \left[f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0 \right];\ \Omega_2 = \left[f_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0 \right] \text{ для варианта 2 и}$$

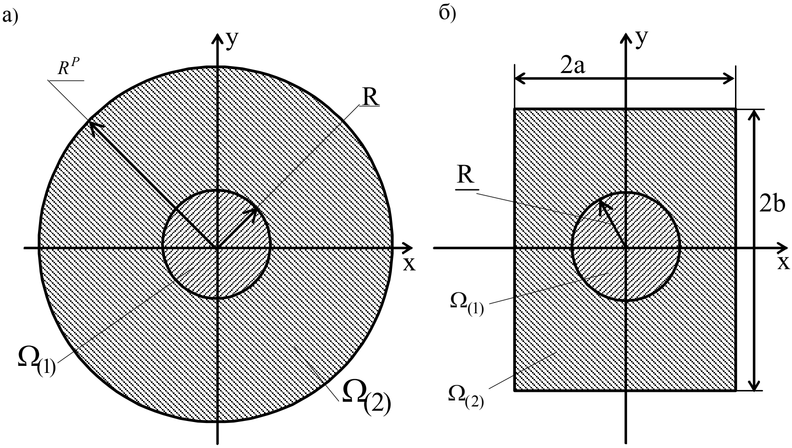

Рисунок 1 – Варианты форм внешней границы: а – вариант 1, б – вариант 2.

$\Omega_3 = \left[f_3 = \dfrac{f_3^*}{\sqrt{\left(f_3^*\right)^2 + |\nabla f_3^*|^2}} \ge 0 \right]$, где $f_3^* = -x^2 - y^2 + R^2$ для обоих вариантов. Для варианта 2 дополнительно вводятся опорные области: $\Omega_4 = [f_4 = -y + b \ge 0]$; $\Omega_5 = [f_5 = y + b \ge 0]$; $\Omega_6 = [f_6 = -x + a \ge 0]$; $\Omega_7 = [f_7 = x + a \ge 0]$.

В качестве структур решения используются структуры работы [2]:

$$u_x^{(1)} = u_x^{ш} + u_x^{(1)o};\ u_y^{(1)} = u_y^{ш} + u_y^{(1)o};\ \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{ш} + \sigma_x^{(1)o};\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{ш} + \sigma_y^{(1)o};$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{ш} + \sigma_{xy}^{(1)o};\ u_x^{(2)} = u_x^{p} + u_x^{(2)o};\ u_y^{(2)} = u_y^{p} + u_y^{(2)o};\ \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{p} + \sigma_x^{(2)o};$$

$$\sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{p} + \sigma_y^{(2)o};\ \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{p} + \sigma_{xy}^{(2)o}.$$

В этих структурах для варианта 1 компенсирующие напряжения имеют вид

$$\sigma_x^k = \frac{4\varepsilon^* \mu R^2}{R\left[\dfrac{\mu}{\mu_1}(\chi_1 - 1) + 2\right] R^{p2}} \cdot \left(\left(l_{(2)}^{\sigma} \right) l^2 - \left(m_{(2)}^{\sigma} \right)^2 \right);$$

$$\sigma_y^k = -\frac{4\varepsilon^* \mu R^2}{R\left[\dfrac{\mu}{\mu_1}(\chi_1 - 1) + 2\right] R^{p2}} \cdot \left(\left(l_{(2)}^{\sigma} \right) l^2 - \left(m_{(2)}^{\sigma} \right)^2 \right);$$

$$\sigma_{xy}^{k} = 2\cdot\frac{4\varepsilon^{*}\mu R^{2}}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]R^{p2}}\cdot l_{(2)}^{\sigma}m_{(2)}^{\sigma},\ \omega_{(1,2)} = f_3;\ \omega_{(2)}^{\sigma} = f_1,$$

а для варианта 2 –

$$\sigma_{x}^{(2)o} = \sigma_{x}^{k}\frac{\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma2}}{\omega_{(2)}^{\sigma1}+\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma2}} + \left[\left(\left(l_{(1,2)}\right)^{2}-\left(m_{(1,2)}\right)^{2}\right)\varPhi_8+\left(m_{(1,2)}\right)^{2}\varPhi_9\right]\frac{\omega_{(2)}^{\sigma}}{\omega_{(2)}^{\sigma}+\omega_{(1,2)}}+$$

$$+\varPhi_{10}\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma1};$$

$$\sigma_{xy}^{(2)o} = \sigma_{xy}^{k1}\cdot\frac{\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma2}\omega_{(2)}^{7}}{\omega_{(2)}^{6}+\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma2}\omega_{(2)}^{7}} + \sigma_{xy}^{k2}\cdot\frac{\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma2}\omega_{(2)}^{6}}{\omega_{(2)}^{7}+\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma2}\omega_{(2)}^{6}}+$$

$$+\sigma_{xy}^{k3}\cdot\frac{\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma1}\omega_{(2)}^{5}}{\omega_{(2)}^{4}+\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma1}\omega_{(2)}^{5}} + \sigma_{xy}^{k4}\cdot\frac{\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma1}\omega_{(2)}^{4}}{\omega_{(2)}^{5}+\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma1}\omega_{(2)}^{4}}+$$

$$+l_{(1,2)}m_{(1,2)}\left(2\varPhi_8-\varPhi_9\right)\frac{\omega_{(2)}^{\sigma}}{\omega_{(2)}^{\sigma}+\omega_{(1,2)}}+\varPhi_{12}\omega_{(1,2)}\omega_{(2)}^{\sigma},$$

компенсирующие напряжения имеют вид

$$\sigma_{x}^{k} = \frac{4\varepsilon^{*}\mu}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]}\cdot\frac{R^{2}(a^{2}-y^{2})}{(a^{2}+y^{2})^{2}};$$

$$\sigma_{y}^{k} = \frac{4\varepsilon^{*}\mu}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]}\cdot\frac{R^{2}(b^{2}-x^{2})}{(x^{2}+b^{2})^{2}};$$

$$\sigma_{xy}^{k} = \left\{\sigma_{xy}^{k1}\ \text{на}\ \omega_{(2)}^{6};\sigma_{xy}^{k2}\ \text{на}\ \omega_{(2)}^{7};\sigma_{xy}^{k3}\ \text{на}\ \omega_{(2)}^{4};\sigma_{xy}^{k4}\ \text{на}\ \omega_{(2)}^{5}\right\},$$

где

$$\sigma_{xy}^{k1} = \frac{8\varepsilon^{*}\mu}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]}\cdot\frac{R^{2}ay}{(a^{2}+y^{2})^{2}},\ \sigma_{xy}^{k2} = -\frac{8\varepsilon^{*}\mu}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]}\cdot\frac{R^{2}ay}{(a^{2}+y^{2})^{2}}$$

$$\sigma_{xy}^{k3} = \frac{8\varepsilon^{*}\mu}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]}\cdot\frac{R^{2}xb}{(x^{2}+b^{2})^{2}},\ \sigma_{xy}^{k4} = -\frac{8\varepsilon^{*}\mu}{R\left[\frac{\mu}{\mu_1}(\chi_1-1)+2\right]}\cdot\frac{R^{2}xb}{(x^{2}+b^{2})^{2}},$$

$\varPhi_i$ ($i=\overline{8,12}$) – неопределенные компоненты, $\omega_{(1,2)}=f_3$, $\omega_{(2)}^4=f_4$, $\omega_{(2)}^5=f_5$, $\omega_{(2)}^6=f_6$, $\omega_{(2)}^7=f_7$, $\omega_{(2)}^{\sigma 1}=f_1$, $\omega_{(2)}^{\sigma 2}=f_2$, $\omega_{(2)}^{\sigma}=\omega_{(2)}^{\sigma 1}\cdot\omega_{(2)}^{\sigma 2}$.

В этих выражениях $\varepsilon^*=-\delta_{0n}^{1,2}$ (малая величина порядка упругих перемещений),

$$\mu=\frac{E^{(2)}}{2\left(1+\nu^{(2)}\right)};\ \mu_1=\frac{E^{(1)}}{2\left(1+\nu^{(1)}\right)};\chi_1=\frac{3-\nu^{(1)}}{1+\nu^{(1)}}.$$

Неопределенные компоненты структур (для варианта 1 их количество составляет 17, а для варианта 2 – 16) представляются в виде разложений по полиномам Чебышева, а коэффициенты в этих разложениях определяются методом Ритца из условия стационарности функционала Рейсснера [3].

Результаты расчетных исследований. Исследовалось влияние размеров внешней границы на различия между результатами точного решения для бесконечной области и приближенного для конечной. С этой целью для вариантов 1 и 2 были проведены расчеты при следующих исходных данных. Упругие характеристики составного тела принимались равными $E^{(1)}=E^{(2)}=1\cdot10^5\,МПа$, $\nu^{(1)}=\nu^{(2)}=0.3$, радиус отверстия $-R=5\ см$, величина натяга – 0.1 *см*. Параметры внешней границы для варианта 1 принимались для первого расчета $R^p=7.5\ см$ и $R^p=20\ см$ для второго расчета, а для варианта 2 $a=b=7.5\ см$ для первого расчета, $a=b=10\ см$ для второго расчета и $a=b=20\ см$ для третьего расчета.

Для варианта 1 значения контактных напряжений оказались в обоих расчетах постоянными по контуру, что обусловлено симметрией задачи, и составили: для $R^p=7.5\ см-0.67\cdot10^3\,МПа$, а для $R^p=20\ см-\ 0.97\cdot10^3\,МПа$. Распределения нормальных напряжений в сечении $x=0$ для указанных расчетов и для точного решения приведены на рис. 2.

Для варианта 2 распределение контактных напряжений по контуру отверстия для указанных расчетов и для точного решения приведено на рис.3, а нормальных напряжений для внешнего тела в сечении $x=0$ на рис 4.

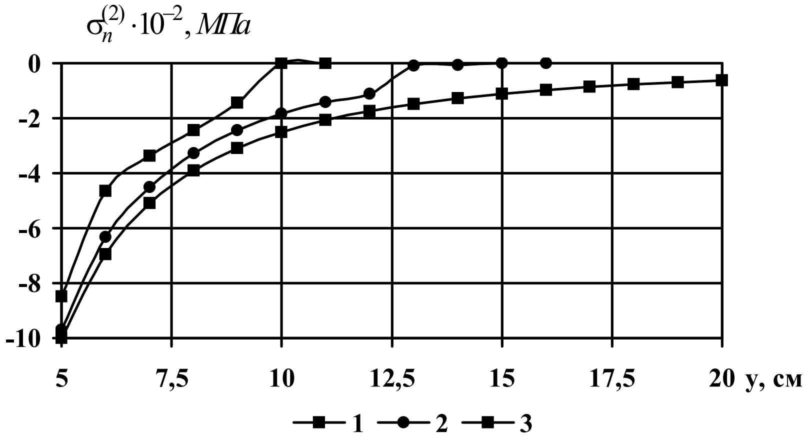

Рисунок 2 – Нормальные напряжения для внешнего тела в сечении $x = 0$: 1,2 – номера расчетов, 3 – точное решение.

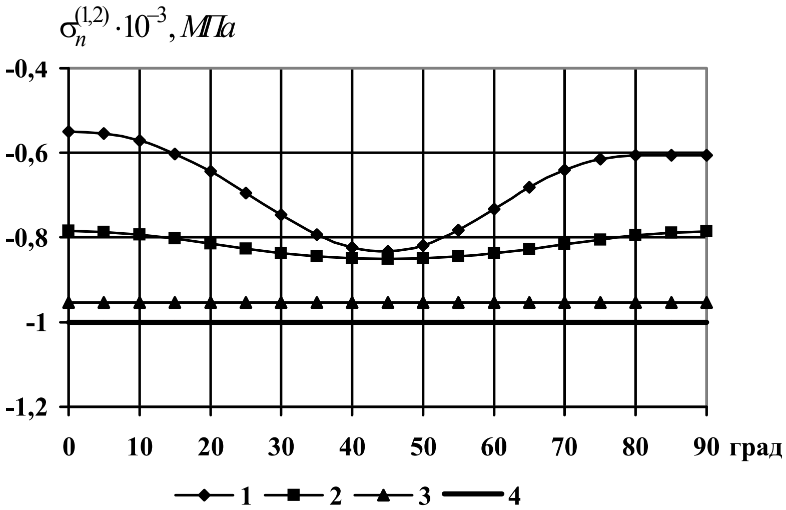

Рисунок 3 – Контактные напряжения на контуре отверстия: 1,2,3 – номера расчетов, 4 – точное решение.

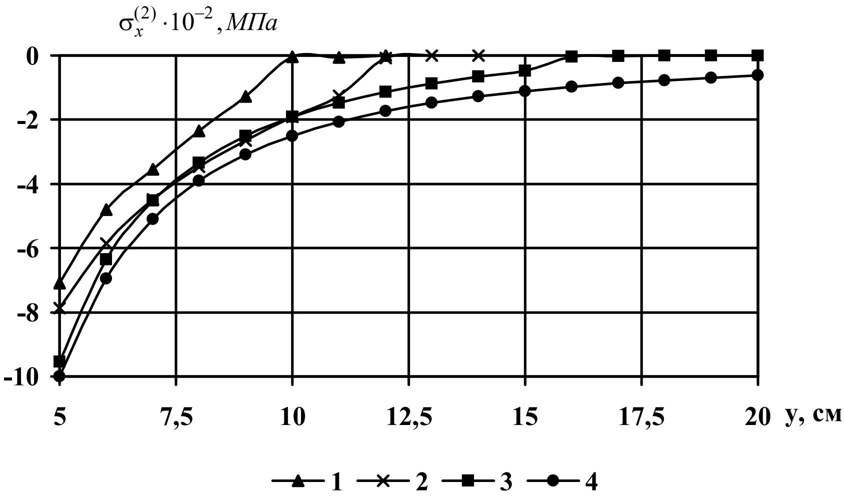

Рисунок 4 – Нормальные напряжения для внешнего тела в сечении $x = 0$: 1,2,3 – номера расчетов, 4 – точное решение.

Выводы. Из полученных результатов следует:

1) при увеличении размеров внешних границ контактные напряжения, соответствующие приближенному решению для конечной внешней области по значениям и характеру их распределения приближаются к контактным напряжениям точного решения для бесконечной;

2) с уменьшением размеров внешних границ различия становятся существенными, что ограничивает пределы применимости точного решения;

3) использование точных решений в указанной постановке повышает эффективность и точность расчетных исследований.

Список литературы: 1. *Тарсис Е.Ю.* Структурная модель неидеального контакта упругих тел на основе метода R-функций. – Вісник Інженерної академії України. – 2002.-КВ№2635.- С.641–644. **2.** *Тарсис Е.Ю.* Смешанный вариационный подход к решению задач для составного тела на основе метода R-функций // Пробл. машиностроения.-2002.-т.4.-№3-4.-С.116-123. **3.** *Тарсис Е.Ю.* Метод R-функций для решения задач теории упругости составных тел на основе смешанных вариационных принципов // Доповіді НАН України.-2002.-№1.-С.63-69.

Поступила в редколлегию 06.10.2010