

Н.В. ЧЕРЕМСЬКА, канд. техн. наук, ст. викладач, НТУ «ХПІ», Харків

УРАХУВАННЯ ФЛУКТУАЦІЙ ПРИ РОЗРАХУНКАХ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ СОНЯЧНИХ БАТАРЕЙ

У статті досліджено теплові режими з метою визначення загальних закономірностей керування просторово-часовими змінами температурного поля у складній системі при урахуванні впливу різних конструктивних та фізичних параметрів, одержано наближені розрахункові формули для середнього температурного поля та його дисперсії, що враховують флуктуаційні процеси при розрахунку теплових режимів сонячних батарей, які дозволяють внести відповідні поправки при теоретичних розрахунках.

The representation for correlation function of the solution of thermal conduction equation describing thermal mode in a final rectangular plate which is under effect of exterior statistically non-stationary sources is obtained. The numerical analysis of a dispersion depending on spatial coordinate and time is given. The obtained results can be used at calculation of thermal modes of radio equipment which is under effect of exterior non-stationary fluctuations.

1. Загальна постановка задачі та її актуальність.

При роботі радіоапаратури, яка входить до системи космічних апаратів, у космічному просторі часто виникають температурні флуктуації через нагрівання поверхні космічних апаратів та сонячних батарей за рахунок взаємодії з космічним середовищем, нагрівання від випромінювання Сонця, планет і працюючих двигунів [1]. При відсутності сонячних променів температура космічних апаратів різко знижується. Зміна процесу переохолодження процесом нагрівання від сонячного випромінювання приводить до того, що конструкції й апаратура, які розташовані на зовнішній поверхні космічних апаратів зазнають циклічний вплив температур. Такий вплив температур є загрозою для матеріалів та виробів, які входять до складу апаратури і сонячних батарей, може привести до спотворення сигналів на виході апарата та навіть до поломки виробу.

Отже, для забезпечення нормального теплового режиму апаратури і визначення характеристик системи терморегулювання необхідно проводити теплове тестування приборів.

При роботі радіоапаратури систем космічних апаратів в космічному просторі також виникають і неконтролюємі температурні флуктуації, які пов'язані, зокрема, з нестационарними неконтролюєміми процесами, які відбуваються на Сонці, попаданням космічних об'єктів у хмари космічних часток плазми сонячного вітру і таке інше, які частіш за все відбуваються на скінченному інтервалі часу і є локалізованими у просторі, і тому, в принципі не можуть бути змодельованими стаціонарними випадковими процесами або однорідними випадковими полями.

Тому виникає необхідність у розрахунках теплових режимів, які мають

статистично нестационарний або неоднорідний характер.

2. Постановка задачі.

Викликає зацікавленість наступний випадок: температура середовища, яке оточує апарат, змінюється з часом; необхідно визначити температурне поле апарата.

Розглянемо наступну стохастичну задачу розповсюдження тепла в пластині скінченних розмірів.

У випадку, коли «поперечні розміри» пластини порівнянні з її «довжиною», необхідно досліджувати імовірнісні властивості розв'язку рівняння теплопровідності для пластини скінчених розмірів.

Така модель заснована на природному припущенні про те, що, наприклад, для сонячної батареї потік сонячної енергії через поверхню є більш істотним, ніж через бічні межі. Відзначимо ще одну особливість досліджуваної моделі: не враховується товщина сонячної батареї, підставою для цього служить та обставина, що площа основ значно більше ніж площа бічних граней і відповідно відносяться теплові потоки.

3. Розв'язання.

Вихідної є наступна початково-крайова задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = k^2 \Delta U + f(x, y, t), \\ U|_{t=0} = U_0(x, y), \\ U|_{x=0} = U|_{x=a} = U|_{y=0} = U|_{y=b} = T_0, \end{cases} \quad (1)$$

де T_0 , $U_0(x, y)$ – детерміновані, а $f(x, y, t)$ – випадкове поле, що враховує флуктуації потоку сонячної енергії.

Шукатимемо розв'язок (1) у вигляді $U=V+T_0$, де для V одержимо наступну задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = k^2 \Delta V + f(x, y, t), \\ V|_{t=0} = U_0(x, y) - T_0 = V_0(x, y), \\ V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

яку вирішуємо стандартним методом поділу змінних [3]:

$$\begin{aligned} V(x, y, t) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} V_{n,m}(t) \varphi_n(x) \psi_m(y), \\ f(x, y, t) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \varphi_n(x) \psi_m(y), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x$, $\psi_n(y) = \sin \frac{m\pi}{b}y$.

Тоді для $V_{n,m}(t)$ отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dV_{n,m}(t)}{dt} + \lambda_{nm}V_{nm} = f_{nm}(t), \\ V_{nm}(t) = V_{nm}^0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad V_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} V_{nm}^0 \varphi_n(x) \psi_m(y),$$

$$V_{nm}^0 = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_0(x, y) \varphi_n(x) \psi_m(y) dx dy, \quad f_{nm}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y, t) \varphi_n(x) \psi_m(y) dx dy.$$

Розв'язок (3) набуває вигляду

$$V_{nm}(t) = V_{nm}^0 \cdot e^{-\lambda_{nm}t} \varphi_n(x) \psi_m(y) + \int_0^t \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} f_{nm}(\tau) d\tau \varphi_n(x) \psi_m(y)$$

для $U(x, y, t)$ одержуємо зображення

$$\begin{aligned} U(x, y, t) = T_0 + \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{nm}^0 e^{-\lambda_{nm}t} \varphi_n(x) \psi_m(y) - T_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\lambda_{nm}t} \varphi_n(x) \psi_m(y) + \\ + \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} f_{nm}(\tau) d\tau \varphi_n(x) \psi_m(y), \end{aligned} \quad (4)$$

яке і є вихідним для підрахунку імовірнісної характеристики. Вираз (4) не придатний для конкретних застосувань через його громіздкість. Тому зробимо ряд припущень, що спрощують цей вираз.

Спрощення 1. Нехай

$$f(x, y, t) = f(x, y) \xi(t), \quad (5)$$

де $f(x, y)$ детермінована функція, тоді

$$f_{nm} = g_{nm} \cdot \xi(t), \quad g_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \varphi_n(x) \psi_m(y) dx dy.$$

Припущення (4) можна обґрунтувати на підставі принципу суперпозиції для задачі (1) і розкладу Лозва-Каруна:

$$f(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \varphi_k(x, y, t), \quad (6)$$

де $\varphi_k(x, y, t)$ – власні функції інтегрального оператора K :

$$K\varphi = \int_a^b K(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \overline{\varphi(x_2, y_2, t)} dx_2 dy_2,$$

де $K(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = Mf(x_1, y_1, t) \overline{f(x_2, y_2, t)}$ - кореляційна функція теплового поля зовнішніх джерел.

У випадку, коли $\xi(x, t)$ має властивість статистичної стаціонарності по t , тобто $K(x, y, t)$ не залежить від t , а отже і власні значення і власні функції теж не залежать від t .

У силу лінійності вихідної задачі достатньо досліджувати в першу чергу випадок одного доданка в (6).

Спрощення 2. Нехай $n = m = 1$, тоді

$$U(x, y, t) = T_0 + U_{11}^0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y) - T_0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y) + \int_0^t e^{-\lambda_{11}(t-\tau)} g_{11} \xi(\tau) d\tau \varphi_1(x) \psi_1(y).$$

$$MU(x, y, t) = T_0 + U_{11}^0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y) - T_0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y). \quad (M\xi(t) \equiv 0).$$

Для кореляційної функції температурного поля в пластині маємо:

$$\begin{aligned} K(x_1, y_1, x_2, y_2, t, s) &= MU(x_1, y_1, t)U(x_2, y_2, s) = \\ &= |g_{11}|^2 \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_{11}[(t-\tau_1)+(s-\tau_2)]} K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_1(x_2)} \psi_1(y_1) \psi_1(y_2), \end{aligned} \quad (7)$$

або $K(x_1, y_1, x_2, y_2, t, s) =$

$$|g_{11}|^2 \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_1(x_2)} \psi_1(y_1) \psi_1(y_2) \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_{11}[(t-\tau_1)+(s-\tau_2)]} K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

При фіксованих значеннях x_1, y_1, x_2, y_2 та $t = s$, отримуємо

$$K(t, t) = |C_1|^2 e^{-2\lambda_{11} t} \int_0^t \int_0^t e^{\lambda_{11} \tau_1} \varphi(\tau_1 + \tau) d\tau_1 \Big| d\tau,$$

де $|C_1|^2 = |g_{11}|^2 \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_1(x_2)} \psi_1(y_1) \psi_1(y_2)$.

Нехай $\varphi(t) = C_1 e^{i\mu t}$, де $\mu = \alpha_1 + \frac{i\beta_1^2}{2}$ одна точка нестационарного спектру першої кратності, яка розташована у верхній півплощині. Тоді

$$K(t, t) \sim |C_1|^2 e^{-2\lambda_{11} t} \frac{1}{\beta_1^2} \frac{e^{-\beta_1^2 t} + e^{-2\lambda_{11} t} - 2e^{-\left(\lambda_{11} + \frac{\beta_1^2}{2}\right)t}}{\left(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2}\right)^2 + \alpha_1^2} \cos \alpha_1 t \quad (8)$$

Залежність $K(t, t)$ від t показана на рис. 1. та 2.

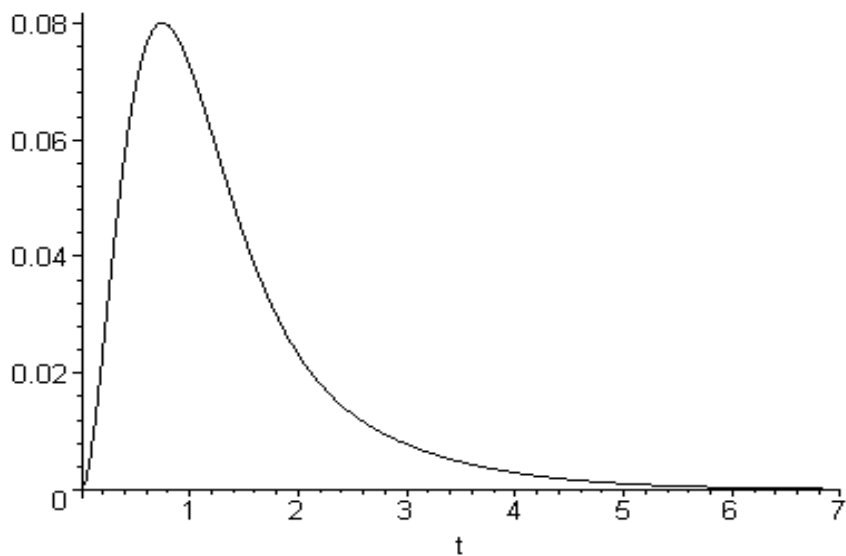


Рисунок 1 – Залежність функції $K(t,t)$ від t при $\beta_1^2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\lambda_{11} = 2 > 1$.

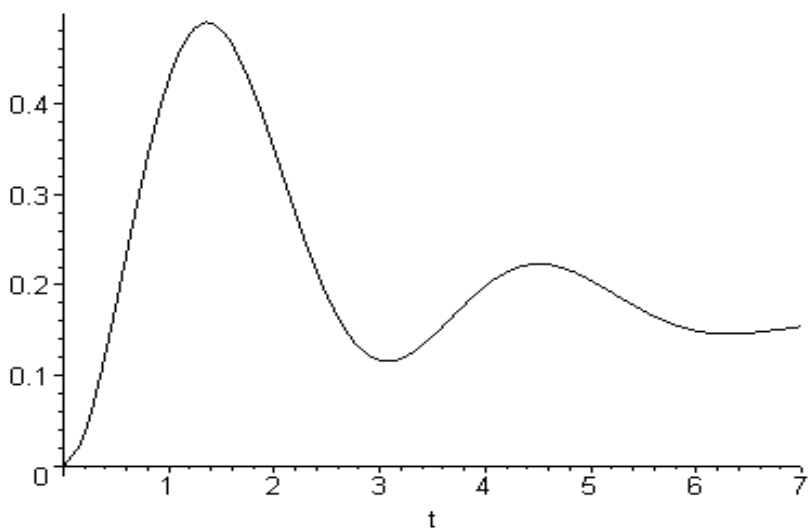


Рисунок 2 – Залежність функції $K(t,t)$ від t при $\beta_1^2 = 3$, $\alpha_1 = 7$, $\lambda_{11} = 0.03 < 1$.

Розглянемо випадок „резонансу” коли $\lambda_{11} = \frac{\beta_1^2}{2}$. Тоді

$$K(t, t) \sim |C_1|^2 \frac{2(1 - \cos \alpha_1 t) e^{-2\lambda_{11}t}}{\beta_1^2 \alpha_1^2} = |C_1|^2 \frac{2(1 - \cos \alpha_1 t) e^{-\beta_1^2 t}}{\beta_1^2 \alpha_1^2}.$$

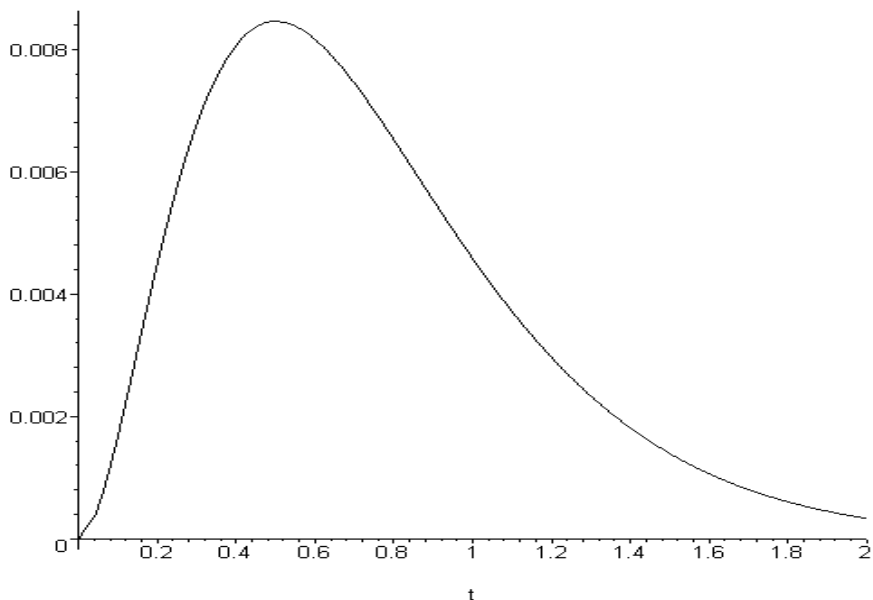


Рисунок 3 – Випадок «резонансу».

Отримаємо з (7) зображення для кореляційної функції у випадку, коли спектр нестационарної флуктуації складається з однієї точки першої кратності, яка міститься у верхній півплощині. У цьому випадку залежність $K_\xi(\tau_1, \tau_2)$ температурного поля має вигляд [2]

$$K_\xi(\tau_1, \tau_2) = |b_1|^2 \frac{e^{-\frac{\beta_1^2}{2}(\tau_1 + \tau_2) + i\alpha_1(\tau_1 - \tau_2)}}{\beta_1^2}$$

та відповідно для кореляційної функції теплового поля маємо:

$$\begin{aligned}
K(x_1, y_1, x_2, y_2, t, s) &= \frac{|g_{11}|^2 |b_1|^2}{\beta_1^2} \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_{11}[(t-\tau_1)+(s-\tau_2)] - \frac{\beta_1^2}{2}(\tau_1 + \tau_2) + i\alpha_1(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \times \\
&\quad \times \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) = \\
&= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{(e^{(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2} + i\alpha_1)t} - 1)(e^{(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2} - i\alpha_1)s} - 1)}{\left(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2}\right)^2 + \alpha_1^2}.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що $K(t, s) \rightarrow 0$ при $t, s \rightarrow \infty$ тільки за умовою $\beta_1^2 > 2\lambda_{11}$. Якщо має місце „резонанс”, тобто $\beta_1^2 = 2\lambda_{11}$, то

$$K(t, s) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{e^{i\alpha_1(t-s)} - e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 s} + 1}{\alpha_1^2} = K_1(t, s) + K_2(t, s),$$

де

$$\begin{aligned}
K_1(t-s) &= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{e^{i\alpha_1(t-s)} + 1}{\alpha_1^2}, \\
K_2(t, s) &= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{-e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 s}}{\alpha_1^2}.
\end{aligned}$$

Знайдемо ранг нестационарності випадкового процесу з кореляційною функцією $K_2(t, s)$.

$$W(t, s) = -(\partial_t + \partial_s)K_2(t, s) = \frac{i}{\alpha_1}(e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 s}) = \sum_{p, q=1}^2 \varphi_p(t) J_{pq} \overline{\varphi_q(s)},$$

де $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1|}}$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1|}} e^{i\alpha_1 t}$, $J_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & \text{sign}\alpha_1 i \\ -\text{sign}\alpha_1 i & 0 \end{pmatrix}$ – інволютивна матриця.

Таким чином, у розглянутому випадку ранг нестационарності дорівнює двом, а $K_{\frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha}}(t, s)$ є кореляційною функцією випадкового процесу першого рангу нестационарності.

Висновки.

Досліджено теплові режими з метою визначення загальних закономірностей керування просторово-часовими змінами температурного поля у складній системі при урахуванні впливу різних конструктивних та фізичних параметрів.

Одержано наближені розрахункові формули для середнього температурного поля та його дисперсії, що враховують флуктуаційні процеси при розрахунку теплових режимів сонячних батарей, які дозволяють внести відповідні поправки при теоретичних розрахунках.

Отримано зображення для кореляційної функції розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності для пластини скінчених розмірів, яка знаходиться під впливом зовнішніх статистично нестационарних джерел.

Аналогічне зображення для кореляційної функції можна отримати для елементів радіоапаратури, які мають форму шайби, і використовуючи спектральні розклади нестационарних випадкових процесів, отримати спектральне зображення розв'язку, яке відповідає початково-крайовій задачі для рівняння теплопровідності.

Аналіз теплових режимів різноманітних радіоелектронних апаратів може бути використано в процесі проектування для вибору оптимальної системи їх охолодження та розміщення певним чином окремих частин апарата відносно одна одної.

Список літератури: 1. *Малинский В.Д.* Испытания аппаратуры и средств измерений на воздействии внешних факторов: Справочник / В.Д. Малинский, В.Х. Бегларян, Л.Г. Дубицкий // Под ред. В.Д. Малинского – М.: Машиностроение, 1993. – 576 с. 2. *Петрова А.Ю., Черемская Н.В., Климова Л.В., Проценко М.А.* Об одной вероятностной модели тепловых режимов радиоаппаратуры // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Сер. „Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматичні системи управління”.– Харків, 2006. – №733. – Вип. 6. – С.160-165. 3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики / М.: Наука, 1977. – 736с.

Надійшла до редколегії 06.10.2010