

Т.В. ШМАТКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В статті пропонується метод дослідження динамічної стійкості нелінійних форм коливань пластин та пологих оболонок зі складною формою плану. Математична постановка задачі здійснена в рамках уточненої теорії першого порядку. Запропонований підхід базується на використанні теорії R-функцій, варіаційних методів, «обмеженого критерію стійкості за Ляпуновим» та методу Рунге-Куты. Наведені чисельні результати для пологих оболонок складної форми, які знаходяться під дією поперечного навантаження.

Research method of the dynamic stability of the geometrically nonlinear vibration modes of plates and shallow shells is considered. Mathematical statement of the problem is carried out in framework of reinforced theory shells of the first order. The proposed method is based on the R-functions theory, variational methods, “limited stability criterion”, obtained from the definition stability by Lyapunov and method by Runge-Kutta. Numerical results for shells with complex form under transverse periodic load can be received using the realized software of designed numerically-analytical approach.

1. Введение. Многослойные пологие оболочки широко применяются в качестве основных элементов многих современных конструкций в различных промышленных областях: в машиностроении, авиапромышленности, кораблестроении и других отраслях. Анализ динамической неустойчивости многослойных пологих пластин и оболочек, нагруженных периодической поперечной нагрузкой, был выполнен во многих работах [1,2,3,4]. Однако большинство исследований проведены для пластин и оболочек достаточно простой формы. Существует ограниченный круг работ, в которых представлены результаты для многослойных пологих пластин и оболочек, имеющих форму, отличную от квадрата, окружности или эллипса. Это объясняется трудностями построения базисных функций в случае сложной геометрии области. С помощью этих функций удастся свести нелинейную систему дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно времени. Одним из универсальных подходов, который используется для решения этой проблемы, является метод R-функций [5, 6]. Этот метод позволяет построить полную систему координатных функций для различных типов граничных условий. В данной статье теория R-функций вместе с вариационными методами и «ограниченным критерием устойчивости по-Ляпунову» [7] применяется как эффективный подход для исследования нелинейных форм колебаний многослойных пологих оболочек сложной формы.

2. Постановка задачи. Рассматриваются многослойные открытые пологие оболочки произвольной формы плана, состоящие из конечного числа ортотропных слоев N . В данной работе исследуются только симметричные по толщине оболочки. Согласно уточненной теории 1 порядка перемещения u и v в направлении осей Ox и Oy являются линейными функциями координаты z , а поперечное перемещение w является постоянной величиной по всей толщине оболочки. Учитывая эти предположения, перемещения представляются в следующем виде:

$$u' = u + z\psi_x, \quad v' = v + z\psi_y, \quad w' = w,$$

где u , v и w являются перемещениями в срединной поверхности,

ψ_x и ψ_y - это сдвиговые деформации срединной поверхности относительно осей Ox и Oy соответственно. Деформации растяжения определяются как

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} + zk_x, & \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} + zk_y, & \varepsilon'_{33} &= 0, \\ \varepsilon'_{12} &= \varepsilon_{12} + zk_{xy}, & \varepsilon'_{13} &= w_{,x} - uk_1 + \psi_x, & \varepsilon'_{23} &= w_{,y} - vk_2 + \psi_y, \\ \varepsilon'_{xz} &= \psi_x + w_{,x}, & \varepsilon'_{yz} &= \psi_y + w_{,y}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{,x} + k_1 w + \frac{1}{2} w_{,x}^2, & \varepsilon_{22} &= v_{,y} + k_2 w + \frac{1}{2} w_{,y}^2, & \varepsilon_{12} &= u_{,x} + v_{,y} + w_{,x} w_{,y}, \\ k_x &= \psi_{,x,x}, & k_y &= \psi_{,y,y}, & k_{xy} &= \psi_{,x,y} + \psi_{,y,x}. \end{aligned}$$

Здесь k_1 и k_2 - кривизны пологих оболочек.

Представим неизвестные функции в качестве компонентов следующего вектора $U = (u, v, w, \psi_x, \psi_y)^T$, тогда разрешающие уравнения могут быть записаны в виде:

$$LU = -NI(w) + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + P, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L &= [L_{ij}]_{i=1,5, j=1,5}, & NI(w) &= (NI_1(w), NI_2(w), NI_3(w), 0, 0)^T, \\ m &= (m_1, m_1, m_1, m_2, m_2)^T, & P &= (0, 0, q(x, y, t), 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Здесь L_{ij} - линейные операторы, которые могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_1^2 C_{55}, \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_2^2 C_{44}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{12} &= L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_1 k_2 C_{45}, \\
L_{13} &= -L_{31} = \left((k_1 C_{11} + k_2 C_{12} + k_1 C_{55}) \frac{\partial}{\partial x} + (k_1 C_{16} + k_2 C_{26} + k_1 C_{45}) \frac{\partial}{\partial y} \right), \\
L_{14} &= L_{41} = k_1 C_{55}, \quad L_{15} = L_{51} = k_2 C_{44}, \\
L_{23} &= -L_{32} = \left((k_1 C_{16} + k_2 C_{26} + k_2 C_{45}) \frac{\partial}{\partial x} + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22} + k_2 C_{44}) \frac{\partial}{\partial y} \right), \\
L_{24} &= L_{42} = k_2 C_{45}, \quad L_{25} = L_{52} = k_2 C_{44}, \\
L_{33} &= C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (C_{11} k_1^2 + 2C_{12} k_1 k_2 + C_{22} k_2^2), \\
L_{34} &= L_{43} = C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{35} = -L_{53} = C_{45} \frac{\partial}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial}{\partial y}, \\
L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{55}, \\
L_{45} &= L_{54} = \left(D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{44} \right), \\
L_{55} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{44}.
\end{aligned}$$

Правая часть уравнения (1), то есть, вектор $Nl(w)$, представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Nl_1(w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
Nl_2(w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
Nl_3(u, v, w, \psi_x, \psi_y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (k_1 C_{16} + k_2 C_{26}) + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Коэффициенты C_{ij}, D_{ij} ($K_{ij} = 0$) и m_j , ($j = \overline{1,5}$) вычисляются по следующим формулам:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} B_{ij}^{(m)}(1, z^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6),$$

$$C_{ij} = k_i^2 \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} B_{ij}^{(m)} dz, \quad (i, j = 4, 5),$$

$$m_j = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \rho_m dz, \quad (j = 1, 2, 3), \quad m_j = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \rho_m z^2 dz, \quad (j = 4, 5).$$

Здесь $B_{ij}^{(m)}$ - коэффициенты жесткости для m -го слоя, k_i ($i = 4, 5$) - коэффициенты сдвига.

3. Метод решения. Разложим неизвестные функции в ряд по собственным функциям $\vec{U}_i = (u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i})$, соответствующим линейной задаче колебаний.

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^2 y_i(t) w_i(x, y), \quad \psi_x = \sum_{i=1}^2 y_i(t) \psi_{x_i}(x, y), \quad \psi_y = \sum_{i=1}^2 y_i(t) \psi_{y_i}(x, y), \\ u &= \sum_{i=1}^2 y_i(t) u_i(x, y) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 y_i y_j u_{ij}, \quad v = \sum_{i=1}^2 y_i(t) v_i(x, y) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 y_i y_j v_{ij}. \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i}$ являются компонентами собственного вектора \vec{U}_i , и при этом функции u_{ij}, v_{ij} должны быть решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L_{11} u_{ij} + L_{12} v_{ij} = -N_1^{(2)}(w_i, w_j), \\ L_{21} u_{ij} + L_{22} v_{ij} = -N_2^{(2)}(w_i, w_j). \end{cases} \quad (3)$$

Правые части системы (3), обозначенные в виде операторов $N_k^{(2)}(w_i, w_j)$, ($k = 1, 2$), имеют следующий вид:

$$N_1^{(2)}(w_i, w_j) = \frac{\partial w_i}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial w_i}{\partial y} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right), \\
Nl_2^{(2)}(w_i, w_j) = & \frac{\partial w_i}{\partial x} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{\partial w_i}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что решение системы (3), дополненной соответствующими граничными условиями, а также решение задачи о линейных колебаниях выполняется с помощью метода R-функций [5,6].

Подставляя выражение (2) для неизвестных функций u, v, w, ψ_x, ψ_y в третье уравнение системы (1) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $y_1(t), y_2(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
y_1'' + \alpha_0^{(1)} y_1 + \alpha_{11}^{(1)} y_1^2 + \alpha_{12}^{(1)} y_1 y_2 + \alpha_{22}^{(1)} y_2^2 + \gamma_{111}^{(1)} y_1^3 + \gamma_{112}^{(1)} y_1^2 y_2 + \gamma_{122}^{(1)} y_1 y_2^2 + \gamma_{222}^{(1)} y_2^3 = \alpha_r P(t), \\
y_2'' + \alpha_0^{(2)} y_2 + \alpha_{11}^{(2)} y_1^2 + \alpha_{12}^{(2)} y_1 y_2 + \alpha_{22}^{(2)} y_2^2 + \gamma_{111}^{(2)} y_1^3 + \gamma_{112}^{(2)} y_1^2 y_2 + \gamma_{122}^{(2)} y_1 y_2^2 + \gamma_{222}^{(2)} y_2^3 = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Коэффициенты этих уравнений определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{(m)} &= \omega_{mL}^2 \\
\alpha_{ij}^{(m)} &= -\frac{1}{m_1 \|w_m\|^2} \iint_{\Omega} \left(k_1 N_{11p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) + k_2 N_{22}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) + N_{11}^L(u_i, v_i, w_i) w_{i,xx} + \right. \\
& \quad \left. + N_{22}^L(u_i, v_i, w_i) w_{i,yy} + 2N_{12}^L(u_i, v_i, w_i) w_{i,xy} \right) d\Omega, \quad (m, i, j = 1, 2), \\
\gamma_{ijk}^{(m)} &= -\frac{1}{m_1 \|w_m\|^2} \iint_{\Omega} \left(k_1 N_{11p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) w_{k,xx} + N_{22}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) w_{k,yy} + \right. \\
& \quad \left. + 2N_{12}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) w_{k,xx} \right) w_m d\Omega.
\end{aligned}$$

Полученная система (4) решается с помощью метода Рунге-Кутты и специального критерия устойчивости, который описывается в следующем разделе.

4. Исследование устойчивости нелинейных форм колебаний. Рассмотрим устойчивость второй периодической или хаотической формы колебаний $y_2(t) = 0$. Неустойчивость формы колебаний $y_2(t) = 0$ означает «перекачку» энергии из одной гармоники ряда Фурье в другую. Переменные $y_2(t)$ и $\dot{y}_2(t)$ рассматриваются в качестве вариаций. Значение вариации y_2 полагается существенно меньше, чем переменная y_1 в области устойчивости формы

колебаний $y_2(t) = 0$, как это принято в теории устойчивости. В работе [7] учитывается, что начальное значение переменной y не является сколь угодно малым и поэтому вводится связь между постоянной ε и величиной δ . Пусть переменная времени t изменяется от 0 до T . Тогда принимается следующий критерий устойчивости/неустойчивости рассматриваемой формы колебаний системы (4):

Неустойчивость формы колебаний $y_2(t) = 0$ фиксируется, если выполняется следующее условие

$$|y_2(t)| \geq \rho |y_2(0)|, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (5)$$

Этот критерий устойчивости, полученный при условии, что величина δ не может быть сколь угодно малой, был назван как “ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову”.

Здесь величина ρ^{-1} – это мера малости начальных вариаций по отношению к максимально допустимым вариациям ε для любых $t \geq 0$. Увеличение значения параметра ρ означает, что допустимые начальные вариации уменьшаются. Существует некоторая произвольность в выборе значения ρ , так как с увеличением времени t в области неустойчивости вариации выходят за пределы начального решения ε -окрестности при любом выборе параметра ρ . Для определенности это значение было принято $\rho \leq 10$.

Для определения конечного значения параметра T численный эксперимент проводился в некоторых узловых точках выбранной сетки системы параметров при фиксированном значении T . Увеличение параметра T и соответствующие вычисления продолжались до тех пор, пока границы областей неустойчивости не стабилизировались в выбранном масштабе плоскости параметров.

5. Численные результаты. Найдем области неустойчивости нелинейных форм колебаний для заземленной трехслойной пологой сферической оболочки, представленной на Рис. 1(а) и опирающейся на план, изображенный на Рис. 1(б).

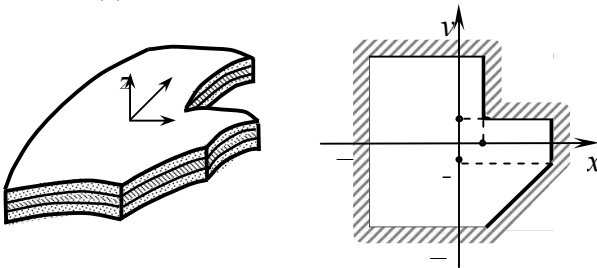


Рисунок 1(а,б) - План заземленной трехслойной оболочки.

Пусть оболочка нагружена поперечной периодической нагрузкой $P(t) = F \cos \Omega t$. Механические свойства оболочки следующие: $E = 25E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$. Коэффициенты сдвига приняты равными $k_4^2 = k_5^2 = 5/6$. Учитывались такие геометрические параметры оболочки:

$$b/a = 1, \quad c/(2a) = d/(2a) = 0.25, \quad 2a/R_x = 2a/R_y = 0.1, \quad h/(2a) = 0.1$$

Граничные условия для защемленного края представляются следующим образом:

$$w = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \psi_x = \psi_y = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

где $\partial\Omega$ обозначает всю границу области, уравнения которой могут быть построены с помощью теории R-функций в виде

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_5.$$

Функции $f_i, (i = \overline{1,5})$ определяются следующим образом:

$$f_1 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0, \quad f_2 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0, \quad f_3 = (c - x) \geq 0, \\ f_4 = (d - y) \geq 0, \quad f_5 = ((y + b)(a - c) - (x - c)(b - d)) \geq 0.$$

Выражения для R-операций \wedge_0, \vee_0 определяются согласно [5]. Соответствующие структурные формулы [5, 6] имеют вид:

$$u = \omega P_1, \quad v = \omega P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega P_4, \quad \psi_y = \omega P_5.$$

Здесь $P_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ - неопределенные компоненты построенной структуры решения, которые раскладываются в ряд в виде некоторой полной системы функций. Коэффициенты этого разложения отыскиваются из условия стационарности соответствующего функционала.

Величины безразмерных параметров собственной частоты для трехслойной ортогонально-армированной $(0^0, 90^0, 0^0)$ сферической оболочки, панели и пластины представлены в Таблице 1.

Таблица 1

Значения безразмерного частотного параметра $\Lambda_i = \lambda_i \frac{(2a)}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$

$(2a/R_x, 2a/R_y)$	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
(0.1, 0.1)	18.851	29.139	36.113	43.113
(0, 0.1)	18.561	29.068	36.085	43.054
(0, 0)	18.453	29.035	36.069	43.031

Области неустойчивости представлены для ортогонально-армированной сферической оболочки на *Рис. 2*. Время стабилизации $T=1000$, то есть, временной параметр, при котором стабилизируются границы областей неустойчивости.

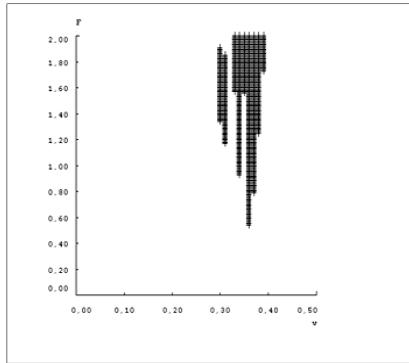


Рисунок 2 – Область неустойчивости для сферической оболочки.

Вычисления проводились в выбранной системе параметров (Ω, F) , при этом переменная Ω изменялась в пределах $0 \leq \Omega \leq 0.5$ и переменная F варьировалась $0 \leq F \leq 2$.

Полученные результаты показывают, что исследуемая оболочка может иметь неустойчивое поведение при следующих значениях параметров системы: $\Omega = 0.27$ и $F = 0.42$.

6. Заключение. Предложен эффективный подход для исследования динамической неустойчивости нелинейных форм колебаний многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана. Данный метод базируется на применении теории R-функций, вариационных методов, «ограниченного критерия устойчивости по Ляпунову» и методе Рунге-Кутты. Представлены численные результаты для защемленной трехслойной полой сферической оболочки.

Список литературы: 1. *Abe A., Kobayashi Y., Yamada G.* One-to-One Internal Resonance of Symmetric Cross-ply Laminated Shallow Shells // *Journal of Applied mechanics* № 68. 2001. PP. 40-649. 2. *M.Ganapathi, T.K.Varadan, V.Balamurugan.* Dynamic instability of laminated composite curved panels using finite element method // *Computers and Structures* № 53. 1994. PP. 335-342. 3. *L.W.Chen, J.Y.Yang.* Dynamical instability of laminated composite plates by the finite element method // *Computers and Structures* № 36. 1990. PP. 845-851. 4. *C.W.Bert, V.Birman.* Dynamic stability of shear deformable antisymmetric angle-ply plates // *International Journal of Solids Structure* № 24. 1987. PP. 233-238. 5. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и ее приложения. К., 1982. 551 с. 6. *Рвачев В.Л., Курна Л.В.* R-функции в задачах теории пластин. К., 1987. 176 с. 7. *Mikhailin Yu.V., Shmatko T.V.* Stability of regular and chaotic modes in dynamical systems with more than one equilibrium positions // *Problems of Machine-Building* № 3-4. Vol.2. 1999. PP. 128-135.

Поступила в редколлегию 06.10.2010