

Е.Г. ЯНЮТИН, докт. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ», Харьков
Н.И. ВОРОПАЙ, асп., ХНАДУ, Харьков

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ

Розглянута поведінка прямокутної пластини під дією імпульсного навантаження. Моделювання деформування пластини виконується на основі уточненої теорії з урахуванням поперечного обтиснення. Визначальна система рівнянь отримана за допомогою варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона. Представлені чисельні результати розв'язання прямих та обернених задач. При ідентифікації невідомих навантажень використано метод регуляризації А.М. Тихонова.

A behavior of the rectangular plate under impulse load is considered. The simulation of the plate deforming is based on refined theory with accounting a transverse compression. The determining system of equations is obtained by Ostrogradskiy-Hamilton's variation principle. Numerical results of solutions of direct and inverse problems are presented. The Tihonov's regularizing method is used at force determination.

1. Введение. Решение прямых и обратных задач механики твердого деформируемого тела является одним из средств исследования протекающих деформационных процессов. Пластины как конструкционные элементы являются часто встречающимися элементами различных машин и сооружений, поэтому оценка их напряженно-деформированного состояния позволяет создать достаточно надежные и прочные конструкции.

2. Анализ публикаций. Существует большое число работ [1, 2], посвященных исследованию динамике пластин, однако проблема создания соответствующих теорий, приближенных к трехмерным задачам теории упругости, и их эффективных методов расчета продолжает сохранять свою актуальность.

Целью настоящей работы является построение уточненной теории пластин на основе гипотезы о линейной зависимости перемещений от поперечной координаты, а также исследование напряженно-деформированного состояния упругой прямоугольной изотропной пластины средней толщины под воздействием сосредоточенных нестационарных нагрузок на основе полученной модели. Кроме того, предложена методика решения обратных задач, которая позволяет получить функции, характеризующие поведение пластины при воздействии на нее неизвестных нагрузок на основе их косвенных проявлений.

3. Постановка задачи. Исследуется деформирование прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины, отнесенной к декартовой системе координат xOy (рис. 1).

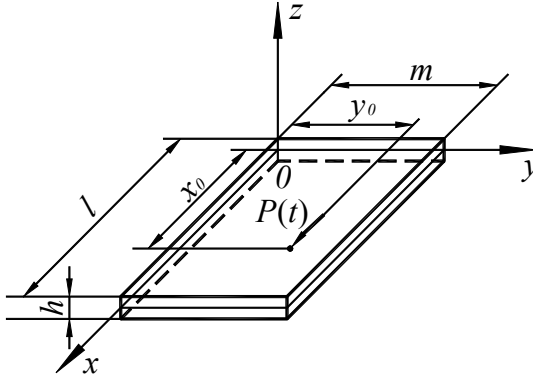


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины.

4. Уравнения динамики пластины. Уравнения движения, описывающие поведение пластины под воздействием внешних сил, основываются на уточненной теории, согласно которой во внимание принимаются влияние инерции вращения и сдвига, а также учитывается деформация поперечного обжатия. Принятая модель позволяет записать следующие кинематические гипотезы:

$$u^z = u + z \cdot \psi_x; v^z = v + z \cdot \psi_y; w^z = w + z \cdot \psi_z, \quad (1)$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ – перемещение точек срединной плоскости; $\psi_x(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$ – углы поворота нормали к срединной плоскости; $\psi_z(x, y, t)$ – линейная деформация поперечного обжатия; $z \in [-h/2, h/2]$, причем h – толщина пластины.

Деформации пластины определяются согласно уравнениям Коши, и они равны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \varepsilon_z = \psi_z; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right); \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

На основе закона Гука получим выражения, связывающие напряжения и деформации

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \psi_z \right] \right]; \\ \sigma_y &= 2G \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \psi_z \right] \right]; \\ \sigma_z &= 2G \cdot \left[\psi_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \psi_z \right] \right]; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \cdot \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right] \right]; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G \cdot \left[\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right]; \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G \cdot \left[\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right],\end{aligned}$$

где $G = E/2(1+\nu)$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

Уравнения движения пластины и граничные условия получим исходя из энергетических предпосылок, а именно на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона [3]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta' W) dt = 0. \quad (2)$$

Здесь δK – вариация кинетической энергии; $\delta \Pi$ – вариация потенциальной энергии; $\delta' W$ – величина, содержащая сумму элементарных работ внешних сил.

Поскольку исследуется прямоугольная пластина, ограниченная координатными линиями $x=0$, $x=l$, $y=0$, $y=m$, то выражение для кинетической энергии примет вид:

$$K = \frac{1}{2} \rho h \int_0^m \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала пластины.

Потенциальная энергия пластины определяется таким образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^m \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad (4)$$

Если в качестве внешних сил выбрать величины p_x, p_y, q , то их элементарную работу можно записать так:

$$\delta' W = \int_0^l \int_0^l (p_x \delta u + p_y \delta v + q \delta w) dx dy. \quad (5)$$

Здесь p_x, p_y, q – проекции вектора внешней силы на оси декартовой системы координат соответственно.

Уравнения, полученные на основе указанного принципа, имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_x; \\ Gh \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - p_y; \\ Gh(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q; \\ 2GI \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + GI \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + GI \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \\ GI \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2GI \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + GI \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}; \\ \left(\nabla^2 - 2h \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) G \psi_z - 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Система уравнений (6) в перемещениях позволяет исследовать деформационные процессы в рассматриваемом объекте.

Выпишем граничные условия для края пластины $x = const$ и отметим, что для края пластины $y = const$ граничные условия имеют аналогичный вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u^0 \text{ или } N_x = N_x^0; \\ v = v^0 \text{ или } T_{xy} = T_{xy}^0; \\ w = w^0 \text{ или } Q_x = Q_x^0; \\ \psi_x = \psi_x^0 \text{ или } M_x = M_x^0; \\ \psi_y = \psi_y^0 \text{ или } M_{xy} = M_{xy}^0; \\ \psi_z = \psi_z^0, \end{array} \right. \quad (7)$$

где N_x, N_y – нормальные усилия; T_{xy} – касательное усилие; Q_x, Q_y – поперечные силы; M_x, M_y – изгибающие моменты; M_{xy} – величина, соответствующая крутящему моменту.

Примем нулевые начальные условия

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = w|_{t=0} = \psi_x|_{t=0} = \psi_y|_{t=0} = \psi_z|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_x}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_z}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, динамика пластины описывается системой уравнений движения (6) с учетом начальных (8) и граничных условий (7).

Отметим, что в монографии [2] на основе гипотез (1) получена более сложная система уравнений нелинейной теории оболочек с учетом поперечных нормальных и сдвиговых деформаций.

5. Решение прямой задачи. Целью задачи является исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной шарнирно-опертой пластины размера $l \times m$ и толщиной h под действием известной нагрузки (рис. 1). Причем, будем рассматривать сосредоточенное нестационарное воздействие на пластину силы, которая касательна к ее срединной плоскости и приложена в точке (x_0, y_0) , а линия действия параллельна оси x (рис. 1). В этом случае выражение для нагрузки будет иметь вид:

$$p_x(x, y, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), \quad (9)$$

где $P(t)$ – некоторая заданная функция изменения силы во времени.

Задача о нестационарных колебаниях пластины сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_x; \\ Gh \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \left(IV^2 - 2h \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) G \psi_z - 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (10)$$

Приведенная система трех уравнений получена на основе системы уравнений (6) с учетом рассматриваемой нагрузки. Остальные три уравнения превращаются в тождества.

Решение системы уравнений (10) относительно неизвестных функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $\psi_z(x, y, t)$ строится с нулевыми начальными условиями (8) на основе разложения искомых функций в тригонометрические ряды по координатам x и y , согласно принятой схеме закрепления пластины, и применения преобразования Лапласа по времени t .

Выражения для определения продольных перемещений $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и деформации поперечного обжатия $\psi_z(x, y, t)$ имеют следующий вид:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Omega_{u_{ikn}} C_{kn} \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \omega_{ikn}(t - \tau) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{m}; \quad (11)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Omega_{v_{ikn}} C_{kn} \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \omega_{ikn}(t - \tau) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}; \quad (12)$$

$$\psi_z(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Omega_{\psi_{z_{ikn}}} C_{kn} \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \omega_{ikn}(t - \tau) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{m}, \quad (13)$$

где ω_{ikn} – частоты собственных колебаний;

$$C_{kn} = \frac{4}{lm} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right);$$

$$\Omega_{u_{ikn}} = \frac{\det^* A_{u_{ikn}}}{\Omega_{ikn}}; \quad \Omega_{v_{ikn}} = \frac{\det^* A_{v_{ikn}}}{\Omega_{ikn}}; \quad \Omega_{\psi_{z_{ikn}}} = \frac{\det^* A_{\psi_{z_{ikn}}}}{\Omega_{ikn}}.$$

В приведенных соотношениях

$$\begin{aligned} \det^* A_{u_{ikn}} &= \omega_{ikn}^4 - \omega_{ikn}^2 \cdot \left(c_1'^2 + c_1^2 \mu_n^2 + c_2^2 (2\lambda_k^2 + \mu_n^2) \right) + (\lambda_k^2 + \mu_n^2) \cdot (c_2^4 \lambda_k^2 + c_1^2 c_2^2 \mu_n^2) + \\ &\quad + c_1'^2 c_2^2 \lambda_k^2 + (c_1^2 c_1'^2 - c_4^2 c_4'^2) \mu_n^2; \\ \det^* A_{v_{ikn}} &= c_3^2 \lambda_k \mu_n \omega_{ikn}^2 + \lambda_k \mu_n \left(c_4^2 c_4'^2 - c_1'^2 c_3^2 - c_2^2 c_3^2 (\lambda_k^2 + \mu_n^2) \right); \\ \det^* A_{\psi_{z_{ikn}}} &= c_4'^2 \lambda_k \omega_{ikn}^2 + c_4'^2 (c_3^2 - c_1^2) \lambda_k \mu_n^2 - c_2^2 c_4'^2 \lambda_k^3; \\ \Omega_{ikn} &= \omega_{ikn} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{jkn}^2 - \omega_{ikn}^2). \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \lambda_k = \frac{k\pi}{l}; \quad \mu_n = \frac{n\pi}{m}; \quad c_1^2 = \frac{2G}{\rho} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu}; \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}; \quad c_3^2 = \frac{G}{\rho} \cdot \frac{1}{1-2\nu};$$

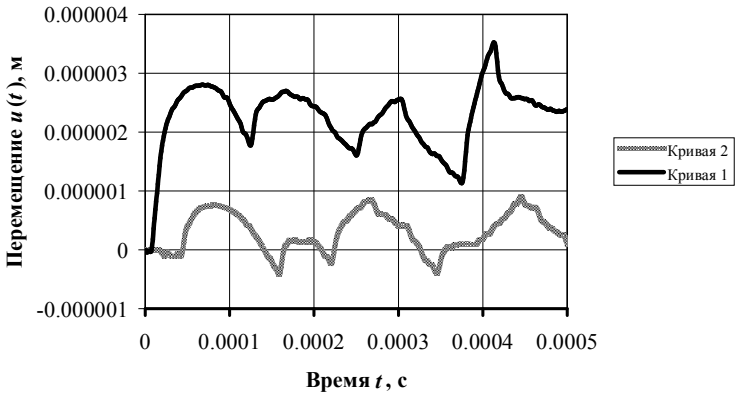
$$c_4^2 = \frac{2G}{\rho} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu}; \quad c_1'^2 = \frac{2Gh}{\rho I} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu}; \quad c_4'^2 = \frac{2Gh}{\rho I} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu}.$$

На базе полученных выражений (11)-(13) можно исследовать деформационные процессы упругой изотропной прямоугольной пластины под действием сосредоточенных нестационарных во времени нагрузок, которые приложены к срединной плоскости.

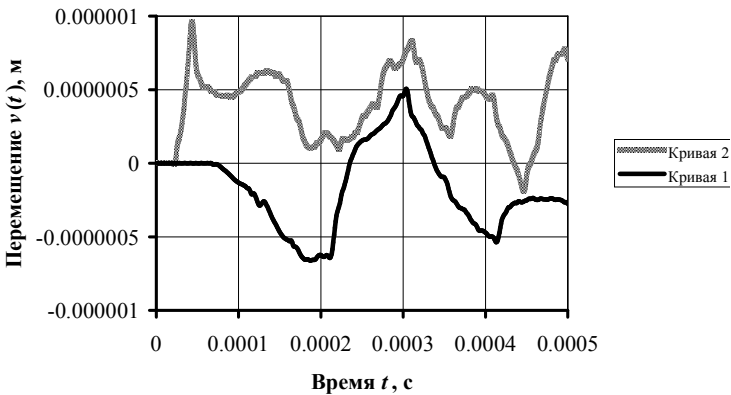
6. Численные результаты. Численные расчеты согласно формулам (11)-(13) будем проводить для пластины со следующими параметрами: $l = 0.8$ м; $m = 0.6$ м; $h = 0.08$ м; $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0.3$; $\rho = 7890$ кг/м³. Сила $P(t)$, прикладываемая в точке с координатами $x_0 = 0.5$ м, $y_0 = 0.4$ м,

изменяется во времени согласно функции Хевисайда: $P(t) = P_0 \cdot H(t)$, где $P_0 = 10^5$ Н – интенсивность действующей нагрузки. Бесконечные суммы в выражениях (11)-(13) были заменены конечным числом членов (\lim) в этих суммах. Число учитываемых членов в одном направлении и другом принималось равным между собой и составляло $\lim = 50$.

На рис. 2, *a*, *б* и 3 показаны кривые перемещения $u(t), v(t)$ и деформация поперечного обжатия $\psi_z(t)$ соответственно в точках с координатами $x_s = 0.55$ м, $y_s = 0.4$ м (точка вблизи приложенной нагрузки) – кривая 1; и $x_s = 0.4$ м, $y_s = 0.3$ м (точка в центре пластины) – кривая 2.



a



б

Рисунок 2 – Изменение перемещений $u(t)$ и $v(t)$ во времени.

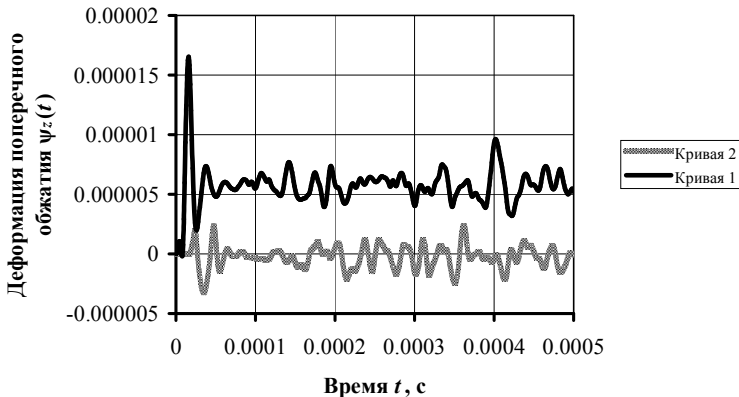


Рисунок 3 – Изменение деформации поперечного обжатия $\psi_z(t)$ во времени.

Система уравнений (6) такова, что на ее основе можно рассмотреть и более сложные законы нагружения упругого тела в виде прямоугольной пластины. Однако при этом существенно возрастет сложность исследования соответствующих задач.

7. Решение обратной задачи. В результате решения обратной задачи осуществляется определение воздействующих на пластину нагружений, которые предполагаются неизвестными, в предположении заданности закона ее колебаний в одной из точек. Аналогичные исследования для других объектов на основе существенно более простых теорий (безмоментная теория, классическая теория, теория типа С.П. Тимошенко) представлены в монографии [4, 5].

Задача идентификации нестационарной касательной нагрузки по заданным продольным перемещениям $\bar{u}(t)$ или $\bar{v}(t)$, воздействующей на прямоугольную пластину сводится к решению следующего уравнения:

$$\bar{u}(t) = \int_0^t P(\tau)K_u(t-\tau)d\tau; \text{ или } \bar{v}(t) = \int_0^t P(\tau)K_v(t-\tau)d\tau. \quad (14)$$

В соотношениях (14)

$$K_u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \cdot \sum_{i=1}^3 \Omega_{u_{ikn}} \sin \omega_{ikn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{m};$$

$$K_v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \cdot \sum_{i=1}^3 \Omega_{v_{ikn}} \sin \omega_{ikn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}.$$

Выражения (14) являются интегральными уравнениями Вольтерра I рода и получены на основе уравнений (11) и (12) соответственно, при условии, что $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$ – заданные функции для конкретной точки (x_s, y_s) , а $P(t)$ – искомая функция.

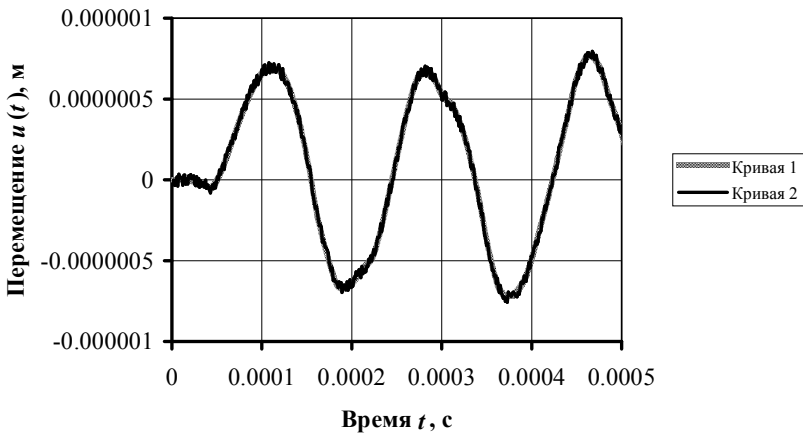
Известно, что непосредственное решение уравнений (14) с помощью метода квадратур не является устойчивым, поэтому здесь применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [6] который позволяет получить приближенное, но устойчивое решение.

Решение задачи сводится к анализу регуляризованного СЛАУ

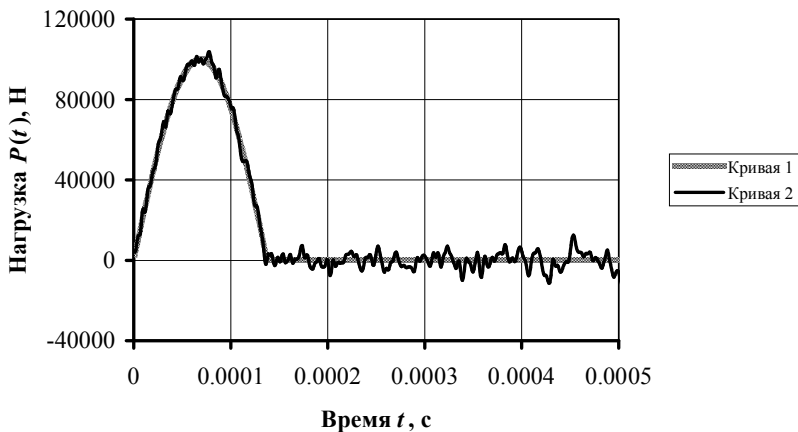
$$\left(A_u^T A_u + \alpha C \right) p = A_u^T u_\delta ; \text{ или } \left(A_v^T A_v + \alpha C \right) p = A_v^T v_\delta , \quad (15)$$

где A_d – матрица, элементы которой $a_{ij} = K_d [(i - j) \cdot \Delta t]$ ($d = u, v$); A_d^T – транспонированная матрица; α – параметр регуляризации; C – симметричная трехдиагональная матрица; p – вектор, который соответствует искомой функции $P(t)$; u_δ, v_δ – векторы исходных данных.

Численный расчет проводился согласно следующей методике: в результате решения прямой задачи определялись перемещения $u(t)$ или $v(t)$ в точке пластины $x_s = 0.4$ м, $y_s = 0.3$ м под действием импульсной нагрузки. На полученные значения функции перемещения накладывался «шум» с уровнем $\delta = 0.05$, моделирующий погрешность измерительных приборов. При решении обратной задачи по «зашумленной» функции перемещения идентифицировалась нестационарная нагрузка, воздействующая на прямоугольную пластину. Восстановление ее производилось при тех же исходных данных, которые применялись в пункте 6.



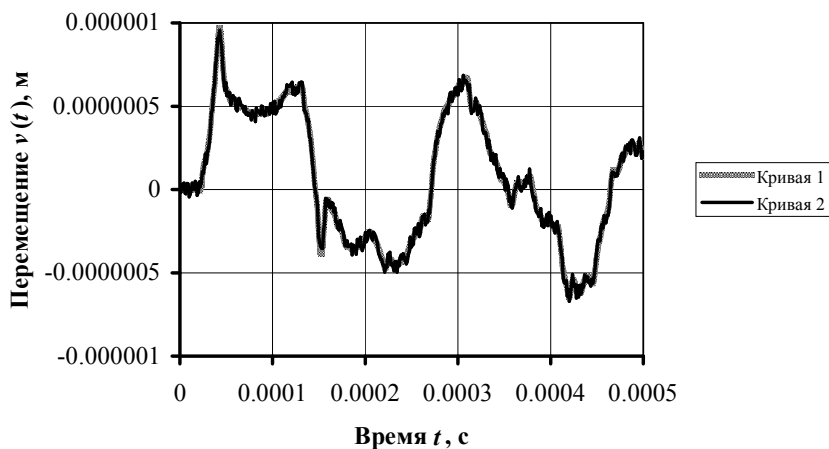
а



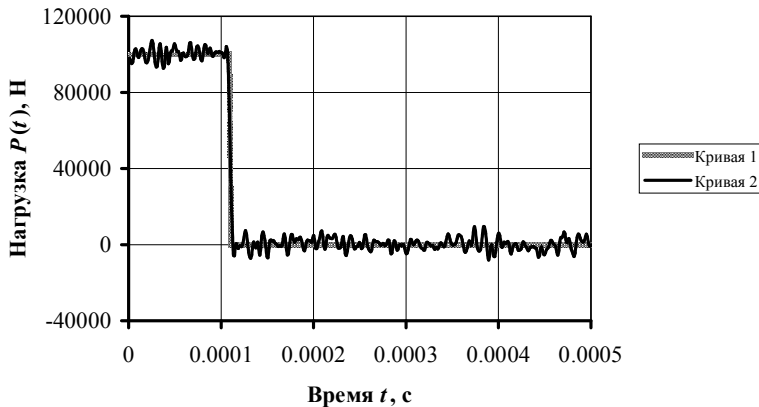
б

Рисунок 4 – Идентификация нагрузки по перемещению $u(t)$.

На рис. 4 и 5 представлены результаты решения обратной задачи о воздействии на пластину касательной к ее срединной плоскости нагрузки. Причем, на рис. 4 – кривые, идентифицированные по перемещению $u(t)$, а на рис. 5 – по перемещению $v(t)$.



а

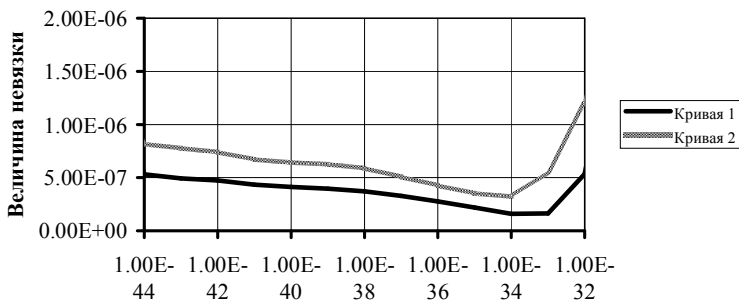


б

Рисунок 5 – Идентификация нагрузки по перемещению $v(t)$.

Рис. 4, а и 5, а (кривая 1) демонстрируют изменение перемещения во времени в результате воздействия нестационарной нагрузки – кривая 1 на рис. 4, б и 5, б соответственно. Кривая 2 на рис. 4, б и 5, б – нагрузка, идентифицированная по «зашумленному» перемещению (кривая 2 на рис. 4, а и 5, а соответственно), при $\alpha = 10^{-34}$.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что идентифицировать нагрузку во времени можно как по перемещению $u(t)$, так и по – $v(t)$, т.е. $u(t)$ и $v(t)$ являются равносильными исходными данными.



Параметр регуляризации α

Рисунок 6 – Изменение параметра регуляризации α от величины невязки.

Кривые, представленный на рис. 6, демонстрирует выбор рационального значения параметра регуляризации α . Отметим, что рациональное значение регуляризации α выбирался на основе метода невязки [7], заключающийся в следующем:

$$\|Ap^\alpha - \bar{u}\| \rightarrow 0. \quad (16)$$

В выражении (16) $u(t)$ – точно известная функция перемещения точки.

Кривая 1 на рис. 6 соответствует выбору параметра регуляризации α для восстановления нагрузки по перемещению $u(t)$, а кривая 2 – по перемещению $v(t)$.

Для перемещения $u(t)$ и для перемещения $v(t)$ параметр регуляризации α принимался равным $\alpha = 10^{-34}$ (рис. 6), который получался соответствующий требованию по выбору параметр регуляризации α в методе невязки (16).

8. Вывод. Использование регуляризирующего алгоритма А.Н. Тихонова дало возможность построить достаточно устойчивое решение для рассмотренных обратных задач динамики прямоугольной пластины даже при наложении «шума» с относительной погрешностью 5%.

Впервые в настоящей работе проведено решение обратных задач нестационарной динамики пластин на основе теории, включающей деформации поперечного обжатия.

Список литературы: 1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций: Монография. – К.: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с. 3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 4. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Воропай Н.И., Гнатенко Г.А., Гришакин В.Т. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть I. – Харьков: ХНАДУ, 2010. – 180 с. 5. Янютин Е.Г., Воропай А.В., Поваляев С.И., Янчевский И.В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть II. – Харьков: ХНАДУ, 2010. – 212 с. 6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.

Поступила в редколлегию 17.09.2010