

**Ю.В. ГАНДЕЛЬ**, д-р физ. - мат. наук, проф., ХНУ им. В.Н. Каразина;  
**С.В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ**, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА  
 ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
 АНТЕНН С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ В СЛУЧАЕ ТЕ-ВОЛН**

Побудовані математичні моделі для випадку випромінювання циліндричної ТЕ-хвилі з подовжніх щілин на базі гіперсингулярних або сингулярних інтегральних рівнянь. Дискретизація проведена чисельним методом дискретних особливостей, з використанням квадратурних формул інтерполяційного типу.

Построены математические модели для случая излучения цилиндрических ТЕ-волн из продольных щелей на базе гиперсингулярных и сингулярных интегральных уравнений. Дискретизация проведена численным методом дискретных особенностей, с использованием квадратурных формул интерполяционного типа.

For the case of cylindrical TE-wave radiation from longitudinal slits mathematic models are built on the basis of hypersingular and singular integral equations. Discretization is carried out with the numerical method of discrete peculiarities, using quadrature formulae of interpolation type.

**Введение.** Модель резонаторной апертурной антенны – идеально проводящая цилиндрическая поверхность с конечным числом продольных щелей, которая возбуждается линейным источником, расположенным на оси цилиндра. Такие электродинамические структуры используются, как зеркальные антенны СВЧ и в антенной технике для авиации и ракетостроения.

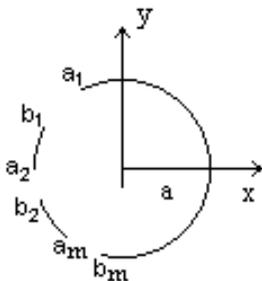


Рисунок 1 – Поперечное сечение цилиндрической поверхности с  $m$  щелями.

В работе [1] изучен случай излучения ТМ-волн из продольных щелей в цилиндре. Предлагаемая работа посвящена решению задачи излучения ТЕ-волн из идеально проводящего цилиндра со щелями.

Математическое описание указанной электродинамической задачи – краевая задача для уравнения Гельмгольца. Она сведена к граничным гиперсингулярным, а также к сингулярным интегральным уравнениям. Дискретная математическая модель этих уравнений построена на базе метода дискретных особенностей (МДО), и, в конечном счете, приводит к системам линей-

ных алгебраических уравнений (СЛАУ), через решение которых выражаются приближенные значения технических характеристик рассматриваемых антенн. Скорость сходимости приближенных значений к точным может быть оценена аналитически [2-3].

**Постановка задачи.** В работе рассмотрен случай излучения стационарной электромагнитной цилиндрической волны, зависимость от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Распространение волн происходит в однородной и изотропной среде. На оси цилиндра расположен источник цилиндрической волны. Известно, что электромагнитное поле внутри и вне рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Задача излучения цилиндрической волны из продольных щелей цилиндрической антенны сведена к краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца [2] с границей, изображенной на рис. 1. Введены полярные координаты  $(r, \varphi)$ .

Введем обозначения: пусть щели – дуги  $(a_q, b_q)$ ,  $q = 1, \dots, m$  окружности  $S_a$  радиуса  $a$ ,

$$a_q = a\alpha_q, b_q = a\beta_q, \varphi \in (\alpha_q, \beta_q), L \equiv \bigcup_{q=1}^m (\alpha_q, \beta_q), \text{ а } CL = [-\pi, \pi] \setminus L.$$

Сужение дуг щелей на плоскость  $XOY$  (см. рис. 1) ( $L$ ) будем называть «основными интервалами», а сужение дуг металлических лент ( $CL$ ) – «дополнительными интервалами».

Искомая функция  $u(r, \varphi)$ , описывающая поле во всем пространстве вне дуг  $\overline{CL}$   $u(r, \varphi) = H_z(r, \varphi)$ , удовлетворяет следующим условиям:

- уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(r, \varphi) + k^2 u(r, \varphi) = 0, \quad (1)$$

- граничному условию

$$\left. \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial u_0(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad \varphi \in CL, \quad (2)$$

- условиям излучения Зоммерфельда;
- условию Майкснера на ребре.

Здесь

$$u_0(r, \varphi) = H_0^{(1)}(kr) - CH_0^{(2)}(kr) \text{ при } r < a,$$

где  $C = \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)}$ , так что  $\left. \frac{\partial u_0(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} \equiv 0$ ;  $u_0(r, \varphi) = 0$  при  $r > a$ .

Ограничения искомой функции  $u(r, \varphi)$  на круг  $r < a$  и внешность круга  $r > a$ , обозначим соответственно  $u^+(r, \varphi)$  и  $u^-(r, \varphi)$ . Если функции  $u^+(r, \varphi)$ ,  $r < a$  и  $u^-(r, \varphi)$ ,  $r > a$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены т.н. «условия сопряжения» для полного поля

$$\left. (u^+(r, \varphi) + u_0(r, \varphi)) \right|_{r=a} = \left. u^-(r, \varphi) \right|_{r=a}; \quad \varphi \in L \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u^+(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial u^-(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad \varphi \in L, \quad (4)$$

то существует функция  $u(r, \varphi)$ , удовлетворяющая уравнению Гельмгольца во всем пространстве вне объединения дуг  $C\bar{L}$  окружности  $S_a$ , причем  $u(r, \varphi) = u^+(r, \varphi)$ , при  $r < a$  и  $u(r, \varphi) = u^-(r, \varphi)$ , при  $r > a$ .

Фурье-представления для функций  $u^+(r, \varphi)$  и  $u^-(r, \varphi)$ , удовлетворяющие уравнению Гельмгольца (1), имеют вид:

$$u^+(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ J_n(kr) e^{in\varphi}, \quad r < a,$$

$$u^-(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}, \quad r > a,$$

причем  $u^-(r, \varphi)$  удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

Используя условия сопряжения (3-4) и граничное условие (2), получаем парный ряд Фурье:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Gamma_n e^{in\varphi} = -u_0|_{r=a}, & \varphi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} = 0, & \varphi \in CL \end{cases}, \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$\Gamma_n = \left[ \frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right], \quad C_n^+ J_n'(ka) = C_n^- H_n^{(1)'}(ka) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Причем имеет место асимптотическая формула при  $n \rightarrow \infty$ :  $\Gamma_n = \frac{B}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Вывод сингулярного интегрального уравнения на «основных интервалах».** Сведем задачу (1)–(2) к сингулярному интегральному уравнению.

Действуя так же, как и в работе [3], сводим парное уравнение (5) к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с дополнительным условием. Для этого вводим в рассмотрение неизвестную функцию

$$v(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi}. \quad (6)$$

Удовлетворяя условию Майкснера на ребре и сделав замену переменных, переходим от интервала  $(\alpha_q, \beta_q)$  к стандартному интервалу  $(-1, 1)$ :

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2},$$

$$v(\varphi)|_{(\alpha_q, \beta_q)} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{w_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Окончательно система СИУ на стандартном интервале принимает вид:

$$\frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{w_q(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 G_{pq}(t, t_0) w_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad q=1, \dots, m, \quad (7)$$

и дополнительные условия:

$$\frac{B}{\pi} \left( \pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} -$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 Q_{pq}(t) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi u_0|_{r=a}, \quad q=1, \dots, m. \quad (8)$$

где

$$G_{pq}(t, t) = \frac{B}{2} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \left[ ctg \frac{g_p(t) - g_q(t)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t)} \right] +$$

$$+ (1 - \delta_{pq}) B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t) - g_q(t)} + K_{pq}(t, t);$$

$$K_{pq}(t, t_0) = \frac{b_q - a_q}{2} \sum_n \left( \Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin \left( n (g_p(t) - g_q(t_0)) \right), \quad p=1, \dots, m;$$

$$Q_{pq}(t) = -(1 - \delta_{pq}) B \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} -$$

$$- B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 R_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}};$$

$$R_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos \left( n (g_p(t) - g_q(t_0)) \right).$$

Дискретизация проведена методом дискретных особенностей [2]. Для получения приближенного решения уравнения (7) с дополнительным условием (8), заменяем неизвестные функции, гладкие ядра и правые части их интерполяционными полиномами, ищем приближенные решения задачи. Полу-

чаем системы интегральных уравнений для приближенных решений. Используя квадратурные формулы интерполяционного типа [2] к системе интегральных уравнений, построенных для приближенных решений, сводим систему интегральных уравнений с дополнительными условиями к эквивалентной СЛАУ относительно значений неизвестных функций в узлах интерполирования [4] (9). Через решение которых получаем приближенные (с контролируемой точностью) решения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{w_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) w_p(t_i^{N_p}) = 0 \\ \frac{B}{N_q} \left( \pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} w_q(t_i^{N_q}) + \\ + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) w_p(t_i^{N_p}) = \pi u_0 \Big|_{r=a} \end{array} \right. , \quad (9)$$

где  $j = 1, \dots, N_q - 1$ ,  $q = 1, \dots, m$ .

**Вывод граничного гиперсингулярного интегрального уравнения на «дополнительных интервалах».** В случае вычисления поля, излученного из щелей малых размеров, удобно располагать точки интерполяции не в щелях структуры, а на металле. Для этого сделаем в парном ряде (5) замену:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{B_n}{\Gamma_n}, \quad n \neq 0 \\ C_0 = \frac{B_0}{\Gamma_0} - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a} \end{array} \right. .$$

Теперь парное уравнение (5) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_n e^{in\varphi}}{\Gamma_n} = \frac{u_0}{\Gamma_0} \Big|_{r=a}, \quad \varphi \in CL \end{array} \right. , \quad (10)$$

При этом

$$\frac{1}{\Gamma_n} = \left[ \frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right]^{-1} \equiv D_0 |n| + D_1 \frac{1}{|n|} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Как и при выводе граничного интегрального уравнения на «основных интервалах», введем новую неизвестную функцию.

$$v(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\varphi}.$$

Применяя параметрические представления интегральных операторов [5] с гиперсингулярным и гладким ядром к парному ряду (10), запишем гиперсингулярное интегральное уравнение (ГСИУ) на системе отрезков в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{D_0}{2\pi} a.f.p. \int_{CL} \frac{v(\theta)}{2 \sin^2 \frac{\theta-\varphi}{2}} d\theta - \frac{D_1}{\pi} \int_{CL} v(\theta) \ln \left| \sin \frac{\theta-\varphi}{2} \right| d\theta - \frac{D_1 \ln 2}{\pi} \int_{CL} v(\theta) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{CL} K(\theta, \varphi) v(\theta) d\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_{CL} v(\theta) d\theta = f(\varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } K(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Gamma_n - D_0 |n| - D_1 \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(\varphi - \theta)); \quad \left. \frac{u_0(r, \varphi)}{\Gamma_0} \right|_{r=a} = f(\varphi).$$

Удовлетворяя условию Майкснера на ребре и сделав замену переменных, переходим от интервала  $(\beta_q, \alpha_{q+1})$  к стандартному интервалу  $(-1, 1)$ :

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\beta_q, \alpha_{q+1}) : t \mapsto \theta = \frac{\alpha_{q+1} - \beta_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_{q+1}}{2}, \quad (12)$$

$$v(\varphi) \Big|_{(\alpha_q, \beta_q)} \equiv \sqrt{1-t^2} w_q(t). \quad (13)$$

Как и в задаче на «основных интервалах», заменяя в (11) неизвестные функции, гладкие ядра и правые части их интерполяционными полиномами и учитывая (12-13), ищем приближенные решения задачи. Используя метод дискретных особенностей, сводим ГСИУ (11) к СЛАУ [4]:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{N_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_p-1} w_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) \left( 1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \frac{1 - (-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{N_p} - t_{0k}^{N_p})^2} - B_1 \frac{N_p}{2} w_p^{N_p-2}(t_{0j}^{N_p}) - \frac{B_2}{N_p} \left( \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \right)^2 * \\ * \sum_{k=1}^{N_p-1} w_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) \left( 1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \left[ \ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{N_p-1} \frac{1}{r} T_r(t_{0k}^{N_p}) T_r(t_{0j}^{N_p}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2N_p} \right] - \\ - \sum_{q=1}^m \left( \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q-1} w_q(t_{0k}^{N_q}) \left( 1 - (t_{0k}^{N_q})^2 \right) K_{pq} \left( g_p(t_{0j}^{N_p}), g_q(t_{0k}^{N_q}) \right) = \\ = f_p(t_{0j}^{N_p-2}), \quad j = 1, \dots, N_p - 1, \quad p = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (14)$$

**Выводы.** В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца с границей – цилиндрической поверхностью с продольными щелями, сведены к гиперсингулярным, а также к сингулярным интегральным уравнениям на системе отрезков. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели (9), (14) для приближенного (с контролируемой точностью) решения указанных краевых задач. Построенные дискретные математические модели, позволяют проводить численные эксперименты по определению технических характеристик (диаграмм направленностей, полей в ближней зоне) для антенн с конечным числом продольных щелей, как это сделано, например, в [1].

**Список литературы:** 1. *Духопельников С.В.* Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 68. С. 76-86. 2. *Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145 с. 3. *Гандель Ю.В.* Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многощелевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков / *Ю. В. Гандель, С. В. Духопельников* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Зб. наук. праць. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264-293. 4. *Гандель Ю.В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. / Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с. 5. *Гандель Ю. В.* Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. / X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – P.57-62.

*Поступила в редколлегию 04.04.2011*

УДК 539.1

*А.А. ГРИГОРЬЕВ*, аспирант, НТУ «ХПИ»;

*А.И. ДЕРИЕНКО*, канд. техн. наук, доц., КУСИТУ, Кременчуг

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОГО СТЕРЖНЯ**

Створено лінійаризовану модель і складено рівняння енергетичного балансу для незгасаючої гармонічної хвилі трансляції (гвинтового фонуна), що рухається по циліндричному гвинтовому стержню зі швидкістю звука. Запропонована модель квантування амплітуди хвилі.

Создана линеаризованная модель и составлено уравнение энергетического баланса для незатухающей гармонической волны трансляции (винтового фонуна), движущейся по цилиндрическому винтовому стержню. Предложена модель квантования амплитуды волны.

A mineralized model has been created and also an equation of the energy balance for a sustained harmonic repeater wave (screw phonon), which moves along a cylindrical spiral core has been formulated. A model of the quantization of a wave amplitude has been suggested.