УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
О.О. ЛИТВИН, канд. фіз.-мат. наук, доц., УІПА, Харків;
О.В. ТКАЧЕНКО, наук. співр., УІПА, Харків

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ІЗОГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ 2-Х ЗМІННИХ.

В статті доведена одна теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій 2-х змінних. Зроблені висновки про вгнутість (опуклість) функції двох змінних при фіксованих значеннях y або x у напрямках осей Ox або Oy відповідно, якщо сліди цієї функції є вгнутими (опуклими) відповідно.

В статье доказана одна теорема об изогеометрических свойствах операторов интерлинации функций двух переменных. Сделаны выводы о вогнутости (выпуклости) функции двух переменных при фиксированных значениях y или x в направлении осей Ox или Oy соответственно, если следы этой функции являются вогнутыми (выпуклыми) соответственно.

The article one theorem of isogeometrical properties of operators interlineation functions of two variables is proved. Conclusions are drawn on concavity (camber) of function of two variables at the fixed values y or x in a direction of axes Ox or Oy accordingly if traces of this function are concave (convex) accordingly.

Вступ. Сучасні системи автоматичного проектування (САПР) поверхонь лопаток авіадвигунів вимагають від математичних моделей (ММ) цих поверхонь збереження важливих ізогеометричних властивостей (неперервності кривини, монотонності на наперед заданих частинах поверхні, включення без змін частин відомих ліній і навіть поверхонь у математичну модель тощо). В той же час, найчастіше, дані про поверхню можуть бути заданими системою точок, розміщених на системі просторових (взагалі кажучи) ліній. Побудова таких математичних моделей є предметом дослідження багатьох відомих фірм при створенні САПР поверхонь.

Аналіз останніх досліджень. Збереженню ізогеометричних властивостей оригінальної кривої або поверхні при побудові математичних моделей кривих або поверхонь присвячено багато праць, огляд яких можна знайти у книзі [1]. В основному увага у вказаній книзі і в цитованих у ній працях зосереджена на дослідженні того, яким умовам повинні задовольняти сплайни відповідного степеня (квадратичні, кубічні тощо) для того, щоб побудована з їх допомогою крива (поверхня) зберігала відповідні ізогеометричні властивості. Дослідження, присвячені аналізу ізогеометричних властивостей ММ поверхонь для випадку, коли інформація про поверхню задається системою точок і ліній, розміщених на поверхні, авторам невідомі.

Постановка задачі. В даній роботі вперше формулюється і доводиться теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій двох змінних [2], які витікають з відповідних властивостей її слідів на системі прямих – сторін прямокутника.

Теорема. *Якщо наближувана функція*

$$f(x,y) \in C^{2,2}(D), D=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$$

має сліди $f(x_1,y), f(x_2,y), f(x,y_1), f(x,y_2)$, *які задовольняють умови*

$$f^{(0,2)}(x_1,y)>(<0), f(x_2,y)>(<0), y_1 \le y \le y_2; \quad (1)$$

$$f^{(2,0)}(x,y_1)>(<0), f^{(2,0)}(x,y_2)>(<0), x_1 \le x \le x_2;$$

де позначено

$$f^{(i,j)}(x,y)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x,y), \quad (2)$$

то оператор

$$O(x,y)=Of(x,y)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1,y)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2,y)+$$

$$+\frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(x,y_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x,y_2)-$$

$$-\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(x_1,y_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_1,y_2)\right)-$$

$$-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(x_2,y_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2,y_2)\right) \quad (3)$$

задовольняє умови інтерлінації

$$O(x_i,y)=f(x_i,y), i=1,2; \quad (4)$$

$$O(x,y_j)=f(x,y_j), j=1,2 \quad (5)$$

та умови

$$\frac{\partial^2 O(x,y)}{\partial x^2}>(<0), x_1 \le x \le x_2; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 O(x,y)}{\partial y^2}>(<0), y_1 \le y \le y_2. \quad (7)$$

Доведення. Інтерлінаційні властивості (4) – (5) операторів $Of(x,y)$ можна встановити безпосередньою перевіркою (див. [2]).

Враховуючи припущення (1) теореми 1, отримаємо

$$\frac{\partial^2 O(x,y)}{\partial x^2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} f^{(2,0)}(x,y_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f^{(2,0)}(x,y_2) > 0 \ (<0),$$

тобто властивості (6) доведені.

Аналогічно, враховуючи припущення (2) теореми, отримаємо

$$\frac{\partial^2 O(x,y)}{\partial y^2} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f^{(0,2)}(x_1,y) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f^{(0,2)}(x_2,y) > 0 \ (<0),$$

що, в свою чергу, доводить властивості (7).

Теорема доведена.

Аналіз отриманих результатів. Теорема стверджує, що $Of(x,y)$ є вгнутою (опуклою) функцією двох змінних, якщо її розглядати як функцію однієї змінної x (при фіксованому $y \in [y_1, y_2]$) або якщо її розглядати як функцію однієї змінної y (при фіксованому $x \in [x_1, x_2]$), при умовах, що сліди $f(x_1,y)$, $f(x_2,y)$, $f(x,y_1)$, $f(x,y_2)$ функції $f(x,y)$ є вгнутими (опуклими) функціями однієї змінної.

Перспективи подальших досліджень. Наступний крок полягає у дослідженні ізогеометричних властивостей $Of(x,y)$ у ситуації, коли вказані сліди $f(x_1,y)$, $f(x_2,y)$, $f(x,y_1)$, $f(x,y_2)$ задаються не формулами, а значеннями у системі точок.

Висновки. Доведена теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій двох змінних на сторонах прямокутника встановлює тісний зв’язок між ізогеометричними властивостями слідів та ізогеометричними властивостями операторів інтерлінації функцій двох змінних, що може мати узагальнення і важливі практичні застосування.

Список літератури: **1.** *Квасов Б.И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360 с. **2.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Надійшла до редколегії 30.09.2011