УДК 519.6

***О.М. ЛИТВИН,*** д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
***Ю.І.ПЕРШИНА,*** канд. фіз.-мат. наук, докторант, УІПА, Харків

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РОЗРИВНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

В роботі запропоновані математичні моделі процесів, що описуються функціями однієї змінної з можливими розривами в заданих вузлах області визначення функції, за допомогою розривних лінійних інтерполяційних та апроксимаційних сплайнів, використовуючи метод найменших квадратів. Побудовані математичні моделі можна буде використати в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

В работе предложены математические модели процессов, которые описываются функциями одной переменной с возможными разрывами в заданных узлах области определения функции, с помощью разрывных линейных интерполяционных и аппроксимационных сплайнов, используя метод наименьших квадратов. Построенные математические модели можно использовать в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

In work mathematical models of processes which are described by one variable functions with possible ruptures in the set knots of a range of definition of function, by means of explosive linear interpolational and approximational splines are offered, using a method of the least squares. The constructed mathematical models can be used in medical, geological, space and other researches.

**Вступ.** Задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів. Наприклад, при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність, тобто щільність тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

**Аналіз останніх досліджень.** Дослідженню розривних функцій присвячені, наприклад, роботи [1], [2], [4], а наближення неперервних функцій розглядається, наприклад, в роботах [3], [6].

В роботі [5] розглядалася задача рівномірного наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій розривними сплайнами однієї змінної. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [1], [4], в яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення розривних функцій, то авторами невідомі загальні методи сплайн-апроксимації та сплайн-інтерполяції розривних функцій за допомогою розривних сплайнів.

Автори вважають, що наближувати розривні функції треба за допомогою теж розривних функцій. В даній роботі пропонується розробити та дослідити інтерполяційний метод наближення та апроксимаційний метод наближення розривних функцій розривними сплайнами, використовуючи метод найменших квадратів.

**Постановка задачі.** Нехай досліджуваний процес описується функцією однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з можливими розривами першого роду в точках $x_k$, $k=\overline{1,n}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі $x_k$ функція має розрив першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a,b]$ на $n-1$ частин. Метою роботи є побудова та дослідження математичних моделей заданого розривного процесу із заданими можливими розривами у вигляді розривного лінійного інтерполяційного та апроксимаційного сплайнів.

**Побудова математичної моделі з використанням інтерполяції.**

***Визначення.*** Будемо називати *розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку* $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ *наступну функцію*:

$$S(x)=Sp_k(x,C)=C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \quad (1)$$

*де* $C_k^+=f(x_k+0)$, $C_{k+1}^-=f(x_{k+1}-0)$.

***Теорема 1.*** *Функція* $S(x)=Sp_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ *задовольняє наступним властивостям*:

$$Sp_k(x_k+0)=C_k^+, \qquad Sp_{k-1}(x_k-0)=C_k^- \quad (2)$$

Визначимо вигляд похибки наближення розривним сплайном (1) та оцінку наближення розривної функції побудованим сплайном таким же чином, як наведено в роботах [3] та [7].

***Теорема 2.*** *Якщо* $f(x)\in C^r[a,b]$, $r=1,2$, *то залишок* $Rf(x)=f(x)-$ $-S(x)$ *наближення розривним інтерполяційним сплайном вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття буде мати вигляд*

$$Rf(x)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi)G(x,\xi)d\xi,\ x\in[x_k,x_{k+1}],$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\dfrac{(x_k-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k\le\xi\le x\le x_{k+1},\\ -\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k\le x\le\xi\le x_{k+1}.\end{cases}$$

***Теорема 3.*** *Оцінка похибки наближення функції* $f(x)$ *побудованим розривним інтерполяційним сплайном* $S(x)=Sp_k(x)$ *на кожному інтервалі* $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ *має вигляд*

$$f(x)\in C^1[x_k,x_{k+1}]\Rightarrow \sup_{x_k\le x\le x_{k+1}}\left|f(x)-Sp_k(x)\right|\le\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\left\|f'(x)\right\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]},$$

$$f(x)\in C^2[x_k,x_{k+1}]\Rightarrow \left\|R(x)\right\|_\infty\le\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8}\cdot\left\|f''(x)\right\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}.$$

***Зауваження.*** Якщо $C_k^+=C_k^-=f(x_k)$, $k=\overline{1,n-1}$, то побудований розривний інтерполяційний сплайн вигляду (1) являється неперервним лінійним інтерполяційним сплайном.

Таким чином, математична модель розривного процесу, що побудована за допомогою розривного інтерполяційного сплайну, визначається за формулами (1) та (2).

**Побудова математичної моделі з використанням апроксимації.**

***Визначення.*** Будемо називати *розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відрізку* $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ функцію вигляду (1), де коефіцієнти $C_k^+$, $C_k^-$ сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(t)-S(t)\right)^2dt\to\min_C. \qquad (3)$$

Для того, щоб оцінити апроксимаційний сплайн $S(x)$ вигляду (1), побудований за допомогою методу найменших квадратів, на кожному інтервалі розбиття $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ розв'яжемо мінімізаційну задачу:

$$J_k(C)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(x)-C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}-C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2dx\to\min_C,\ k=\overline{1,n-1}.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\dfrac{\partial J_k(C)}{\partial C_k^+}=0$, $\dfrac{\partial J_k(C)}{\partial C_{k+1}^-}=0$, складену відносно невідомих $C_k^+, C_{k+1}^-$:

$$\begin{cases} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} 2\cdot\left(f(x)-C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}-C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\cdot\left(-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)dx=0, \\ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} 2\cdot\left(f(x)-C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}-C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\cdot\left(-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)dx=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k^+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(x-x_{k+1})^2}{(x_k-x_{k+1})^2}dx+C_{k+1}^-\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_k)(x_k-x_{k+1})}dx=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{f(x)(x-x_{k+1})}{x_k-x_{k+1}}dx, \\ C_k^+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(x-x_{k+1})(x-x_k)}{(x_k-x_{k+1})(x_{k+1}-x_k)}dx+C_{k+1}^-\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(x-x_k)^2}{(x_{k+1}-x_k)^2}dx=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{f(x)(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k}dx. \end{cases}$$

В отриманій системі зробимо заміну $C_{k+1}^-=f(x_{k+1}-0)+\varepsilon_{k+1}$, $C_k^+=f(x_k+0)+\varepsilon_k$, та замінимо функцыю $f(x)$ *інтерполяційним поліномом Лагранжа* із залишковим членом $R(x)$. Після обчислення інтегральних членів системи отримаємо систему наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_k+\frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_{k+1}=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}R(x)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx, \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_k+\frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_{k+1}=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}R(x)\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx. \end{cases} \tag{4}$$

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\|=\max\{\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}\}$ та результати теореми 3, перепишемо систему (4) у ыншому вигляді.

1. Якщо $f(x)\in C^1[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\frac{1}{6}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f'(x)\|_\infty\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2, \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\frac{1}{3}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f'(x)\|_\infty\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2, \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|\varepsilon\|\le\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_\infty.$$

2. Якщо $f(x)\in C^2[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\frac{1}{6}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f''(x)\|_\infty\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{16}, \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\frac{1}{3}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f''(x)\|_\infty\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{8}, \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\| \le \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_\infty .$$

З цих нерівностей витікає, що, якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \le \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{x_{k+1}-x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]},$$

а якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \le \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]},$$

$$L_\infty[a,b] = \lim_{p\to\infty} L_p[a,b].$$

Якщо наближувана функція $f(x)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією з точками розриву $x = x_k$, $k = \overline{1,n}$ та наближуємо її кусково-лінійним сплайном $S(x)$, визначеним формулами (1) з невідомими коефіцієнтами $C_k^+, C_k^-$, що знаходяться з умови (3), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x) = f(x)$.

***Зауваження.*** Якщо $C_k^+ = C_k^- = S(x_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Отже, математична модель розривного процесу, побудована за допомогою розривного апроксимаційного сплайну, визначається за формулами (1) та (3).

**Чисельний експеримент.** Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з трьома точками розриву першого роду (рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \le x < -0.5 \\ 0.5 - 4x^2, & -0.5 \le x < 0 \\ 2x^2 - 1, & 0 \le x < 0.5 \\ 1 - x, & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}.$$

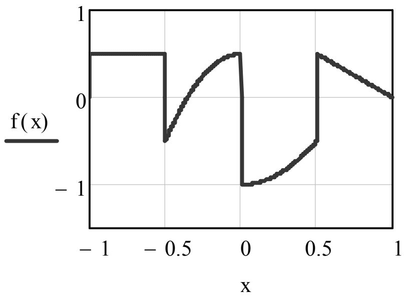



Рисунок 1 – Аналітичний та графічний вигляд наближуваної функції.

Обираємо вузли сплайну: $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$, $x_5 = 1$. Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

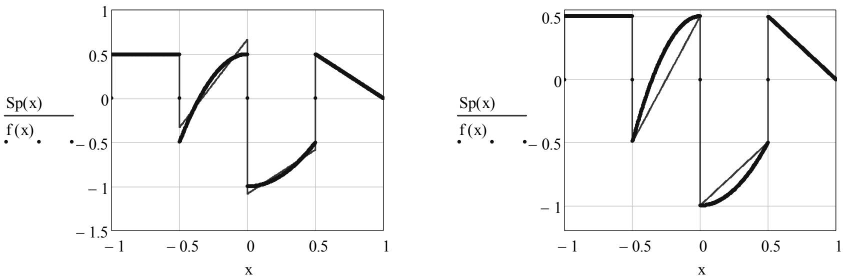
$$C_1^+ = f(x_1+0) = 0.5, \qquad C_3^+ = f(x_3+0) = -1,$$
$$C_2^- = f(x_2-0) = 0.5, \qquad C_4^- = f(x_4-0) = -0.5,$$
$$C_2^+ = f(x_2+0) = -0.5, \qquad C_4^+ = f(x_4+0) = 0.5,$$
$$C_3^- = f(x_3-0) = 0.5, \qquad C_5^- = f(x_5-0) = 0.$$

Наближуючий інтерполяційний сплайн, згідно формули (1), буде мати вигляд (рис.2 а):

$$S_{інтерп}(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \le x < -0.5, \\ 2x+0.5, & -0.5 \le x < 0, \\ x-1, & 0 \le x < 0.5, \\ 1-x, & 0.5 \le x \le 1. \end{cases}$$

Апроксимаційний сплайн, побудований у вигляді формули (1), де коефіцієнти матриці $C$ знаходяться з умови (3), набуває вигляду (рис.2б)

$$S_{апрокс}(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \le x < -0.5, \\ 2x+0.7, & -0.5 \le x < 0, \\ x-1.08, & 0 \le x < 0.5, \\ 1-x, & 0.5 \le x \le 1. \end{cases}$$




а) б)

Рисунок 2 – Графічний вигляд функції $f(x)$ (тонка лінія) та наближуючого: а) інтерполяційного сплайну, б) апроксимаційного сплайну (жирна лінія).

Максимальне відхилення функції $f(x)$ від побудованого інтерполяційного та апроксимаційного сплайнів відповідно дорівнюють

$$\max\left| f(x) - S_{інтерп}(x) \right| \approx 0.26,$$

$$\max\left|f(x)-S_{апрокс}(x)\right|\approx 0.16\,.$$

Як бачимо, побудовані сплайни точно наближують функцію на тих інтервалах, де вона постійна або задана лінійно. Звичайно, апроксимаційний сплайн наближує функцію краще ніж інтерполяційний. Чисельний експеримент підтверджує викладену вище теорію.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

**Висновки.** Таким чином, в роботі запропонована математична модель розривного процесу, що описується функцією однієї змінної, побудована за допомогою розривного інтерполяційного сплайну. Визначений загальний вигляд похибки наближення функції побудованою розривною конструкцією в інтегральному вигляді, та наведені оцінки похибки наближення в кожному інтервалі розбиття. В роботі також запропонована математична модель розривного процесу, що побудована за допомогою розривного апроксимаційного сплайну, коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня.

**Список літератури:** **1.** *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И.*, Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с. **2.** *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1976. – 320 с. **3.** *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с. **4.** *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. – К.: Наук. думка, 1973 – 122 с. **5.** *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989.– 272с. **6.** *De Vore R.A.* A method of grid optimization for finite element methods. – Computer method in appl. Mechanics and engineering, 1983. – Vol.41. – P. 29–45.

*Надійшла до редколегії 12.09.2011*