УДК 519.6

С.І. КУЛИК, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

МІШАНА ВЕЙВЛЕТ-АПРОКСИМАЦІЯ ХААРА ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Запропоновано метод побудови операторів мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій трьох змінних. Доведені їх властивості, а також теорема про оцінку похибки наближення неперервних функцій цими операторами.

Предложен метод построения операторов смешанной вейвлет-аппроксимации Хаара функций трех переменных. Доказаны их свойства, а также теорема об оценке погрешности приближения непрерывных функций этими операторами.

The article suggests a method of creating Haar's blending wavelet-approximation operators of functions of three variables. Proved their properties, as well as the theorem on error estimation of the approximation of continuous functions by these operators.

Вступ. Теорія *вейвлетів* на даний час є однією з найбільш ефективних теорій наближення функцій однієї та багатьох змінних. Вона знаходить широкі застосування в ряді областей науки і техніки. Вейвлет-аналіз використовується для стиснення й обробки зображень, розпізнавання мовних сигналів, передбачення землетрусів, прогнозування погоди, у медицині (томографія, електрокардіографія), при передбаченні курсу цінних паперів на ринку, гідродинаміці, гідроакустиці та інших галузях [1]-[9], а також в Інтернеті (для зменшення обсягу звукових та відео файлів). Вейвлети мають невичерпні можливості в обробці сигналів і зображень, наприклад для Інтернету [10], що полягає в зменшенні об'єму звукових та відеофайлів. На даний час широко використовуються і стали популярними *стандарти MP4*, *JPEG 2000*, а також відомі графічні програмні засоби, наприклад *Corel DRAW* тощо, які використовують вейвлет-технологію обробки зображень. Вейвлет-обробка сигналів забезпечує можливість доволі ефективного стиснення сигналів і їх відновлення з малими втратами інформації, а також використовується для задач фільтрації сигналів [11]. Для ряду типів вейвлетів існують швидкі алгоритми *вейвлет-перетворення* [12], [13], що дає можливість значно зменшити витрати часу при їх реалізації.

Проте, слід зазначити, що дослідження теорії вейвлет-апроксимацій функцій багатьох змінних на даний момент можна вважати недостатнім. Зокрема, не розвинуто та не досліджено такий важливий розділ теорії вейвлет-апроксимацій як мішана вейвлет-апроксимація функцій трьох і більше змінних, в той час як дослідження з двовимірної вейвлет-апроксимації продемонстрували її високу ефективність, як з точки зору точності апроксимації так і з точки зору стиснення інформації про двовимірні сигнали (образи). Тому актуальною є розробка та дослідження мішаної вейвлет-апроксимації функцій трьох змінних та побудова і дослідження на їх основі узагальнених вейвлет-апроксимацій функцій трьох змінних.

Аналіз останніх досліджень. В роботах *Кашина Б.С.*, *Саакяна А.А.* [14], *Ronald A. DeVore* [15], *Stephane G. Malat* [16], *Yves Meyer* [17], [18], *Cohen A.* [19], *Wayne M. Lawton* [20], *Ingrid Daubechies* [21], *K. Gröchenig* [22], *Jelena Kovačević та Martin Vetterli* [23], *K. Gröchenig* та *W. R. Madych* [24] досліджена *теорія кратномасштабного аналізу* (КМА) та теорія вейвлетів багатьох змінних (дивись також огляд «Fundamental Papers in Wavelet Theory» авторів Christopher Heil та David F. Walnut [25]). Відмітимо, що дослідження, присвячені побудові вейвлетів від багатьох змінних цих та інших авторів не використовували оператори мішаної вейвлет-апроксимації (blending function approximation operators). В роботах [26]-[31] авторів даної статті запропоновано і досліджено оператори $Wf\left(x,y\right)$ *мішаної вейвлет-апроксимації Хаара* функцій двох змінних. Нагадаємо вигляд цих операторів:

$$Wf\left(x,y\right)=\left(W_{1,p}+W_{2,q}-W_{1,p}W_{2,q}\right)f\left(x,y\right),$$

де

$$W_{1,p}f\left(x,y\right)=\left(C1_{00}f\right)\left(y\right)+\sum_{i=0}^{p}\sum_{l=0}^{2^i-1}\left(C1_{i,l}f\right)\left(y\right)\psi_{i,l}\left(x\right),$$

$$W_{2,q}f\left(x,y\right)=\left(C2_{00}f\right)\left(x\right)+\sum_{j=0}^{q}\sum_{m=0}^{2^j-1}\left(C2_{j,m}f\right)\left(x\right)\psi_{j,m}\left(y\right),$$

$$\left(C1_{00}f\right)\left(y\right)=\int_0^1 f\left(x,y\right)dx\,,\ \left(C1_{i,l}f\right)\left(y\right)=\int_0^1 f\left(x,y\right)\psi_{i,l}\left(x\right)dx\,,\ i,l\in\mathbb{Z}\,,$$

$$\left(C2_{00}f\right)\left(x\right)=\int_0^1 f\left(x,y\right)dy\,,\ \left(C2_{j,m}f\right)\left(x\right)=\int_0^1 f\left(x,y\right)\psi_{j,m}\left(y\right)dy\,,\ j,m\in\mathbb{Z}\,.$$

Введемо позначення:

$$\psi_{j,k}\left(t\right)=2^{-j/2}\psi\left(2^j t-k\right),\ j,k\in\mathbb{Z}\,,$$

де $\psi\left(t\right)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ -1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right),\\ 0, & t<0\vee t\geq 1.\end{cases}$

Крім того, у вказаних роботах авторів запропоновані і досліджені оператори узагальненої двовимірної вейвлет-апроксимації Хаара функцій двох змінних (УДВА)

$$\widetilde{W}_{p,q,N} f(x,y) = \left(\widetilde{W}_{1,p,N} + \widetilde{W}_{2,q,N} - W_{1,p} W_{2,q}\right) f(x,y),$$

$$\widetilde{W}_{1,p,N} f(x,y) = W_{1,p} W_{2,N} f(x,y),$$

$$\widetilde{W}_{2,q,N} f(x,y) = W_{1,N} W_{2,q} f(x,y),$$

де оператори $W_{1,p} f(x,y)$, $W_{1,N} f(x,y)$ – діють на функцію $f(x,y)$, як на функцію від змінної x (змінна y вважається параметром); оператори $W_{2,q} f(x,y)$, $W_{2,N} f(x,y)$ діють на функцію $f(x,y)$, як на функцію від змінної y (змінна x вважається параметром). Основними з найважливіших властивостей цих операторів є наступні:

1) $\int_0^1 W_{p,q} f(x,y)dx = \int_0^1 f(x,y)dx = (C1_{00} f)(y)$, $\int_0^1 W_{p,q} f(x,y)dy = \int_0^1 f(x,y)dy = (C2_{00} f)(x)$,

$\int_0^1 W_{p,q} f(x,y)\psi_{i,l}(x)dx = \int_0^1 f(x,y)\psi_{i,l}(x)dx = \left(C1_{i,l} f\right)(y)$, $i = \overline{0,p}$, $l = \overline{0,2^i - 1}$,

$\int_0^1 W_{p,q} f(x,y)\psi_{j,m}(y)dy = \int_0^1 f(x,y)\psi_{j,m}(y)dy = \left(C2_{i,m} f\right)(x)$, $j = \overline{0,q}$, $m = \overline{0,2^j - 1}$.

2) $f(x,y) - W_{p,q} f(x,y) = \left(I - W_{p,q}\right) f(x,y) = R_{1,p} R_{2,q} f(x,y)$,

$R_{1,p} = \left(I - W_{1,p}\right) f(x,y)$, $R_{2,q} = \left(I - W_{2,q}\right) f(x,y)$, де I – тотожній оператор.

3) $f(x,y) - \widetilde{W}_{p,q,N} f(x,y) = O\left(\left|\left(f - W_{p,q} f\right)(x,y)\right|\right)$, $\left|\left(f - W_{p,q} f\right)(x,y)\right| \to 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}:$ $f(x,y) - \widetilde{W}_{p,q,N} f(x,y) = O\left(\left|\left(f - W_{p,q} f\right)(x,y)\right|\right)$.

Таким чином, оператори мішаної вейвлет-апроксимації, які використовують оператори вейвлет-апроксимації Хаара, що діють на функцію $f(x,y)$ як на функцію однієї змінної (x або y відповідно), мають точність $O\left(\varepsilon^2\right)$ при $p = q$, якщо $R_{1,p} f = O(\varepsilon)$, $R_{2,p} f = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. При цьому класична двовимірна вейвлет-апроксимація Хаара $W_{1,p} W_{2,p} f(x,y)$ має таку ж саму за порядком точність при $p = N$, як і $R_{p,q,N} f(x,y)$ при значно більшій кількості коефіцієнтів двовимірної вейвлет-апроксимації.

Постановка задачі. Задача полягає у побудові операторів мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій трьох змінних та дослідження їх апроксимативних властивостей.

Основні результати роботи. Введемо позначення:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi\left(2^j t - k\right),\ j,k \in \mathbb{Z},$$

де $\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, 1/2\right), \\ -1, & t \in \left[1/2, 1\right), \\ 0, & t < 0 \vee t \geq 1. \end{cases}$

Для кожної інтегрованої на R^3 функції $f(x, y, z)$ введемо оператори:

$$W_{1,p} f(x,y,z) = \left(C1_{00} f\right)(y,z) + \sum_{i=0}^{p} \sum_{l=0}^{2^i - 1} \left(C1_{i,l} f\right)(y,z)\psi_{i,l}(x),$$

$$W_{2,q} f(x,y,z) = \left(C2_{00} f\right)(x,z) + \sum_{j=0}^{q} \sum_{m=0}^{2^j - 1} \left(C2_{j,m} f\right)(x,z)\psi_{j,m}(y),$$

$$W_{3,r} f(x,y,z) = \left(C3_{00} f\right)(x,y) + \sum_{k=0}^{r} \sum_{n=0}^{2^k - 1} \left(C3_{k,n} f\right)(x,y)\psi_{k,n}(z),$$

$$\left(C1_{00} f\right)(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)\,dx,\ \left(C1_{i,l} f\right)(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx,\ i,l \in \mathbb{Z},$$

$$\left(C1_{00} f\right)(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)\,dx,\ \left(C1_{i,l} f\right)(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx,\ i,l \in \mathbb{Z},$$

$$\left(C1_{00} f\right)(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)\,dx,\ \left(C1_{i,l} f\right)(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx,\ i,l \in \mathbb{Z},$$

$$W_{p,q,r} f(x,y,z) = \left(W_{1,p} + W_{2,q} + W_{3,r} - W_{1,p}W_{2,q} - W_{1,p}W_{3,r} - W_{2,q}W_{3,r} + W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}\right)\times$$
$$\times f(x,y,z).$$

Лема 1. *Оператори* $W_{1,p} f(x,y,z)$ *мають наступні властивості:*

$$\int_0^1 W_{1,p} f(x,y,z)\,dx = \int_0^1 f(x,y,z)\,dx = \left(C1_{00} f\right)(y,z),\ \forall y,z \in [0,1], \quad (1)$$

$$\int_0^1 W_{1,p} f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx = \left(C1_{i,l} f\right)(y,z),$$

$$i = \overline{0,p},\ l = \overline{0, 2^i - 1}. \quad (2)$$

Доведення цієї леми випливає з відомих властивостей вейвлет-сум Хаара [1] від однієї змінної, оскільки в даному випадку при інтегруванні за змінною x змінні y та z вважаються параметрами.

Зауваження. Аналогічні властивості мають оператори $\int_0^1 W_{2,q} f(x,y,z)\,dy$ та $\int_0^1 W_{3,r} f(x,y,z)\,dz$:

$$\int_0^1 W_{2,q} f(x,y,z)\,dy = \int_0^1 f(x,y,z)\,dy = (C2_{00} f)(x,z), \quad \forall x,z \in [0,1], \tag{3}$$

$$\int_0^1 W_{2,q} f(x,y,z)\psi_{j,m}(y)\,dy = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{j,m}(y)\,dy =$$
$$= \left(C2_{j,m} f\right)(x,z), \quad j=\overline{0,q},\ m=\overline{0,2^j-1}, \tag{4}$$

$$\int_0^1 W_{3,r} f(x,y,z)\,dz = \int_0^1 f(x,y,z)\,dz = (C3_{00} f)(x,y), \ \forall x,y \in [0,1], \tag{5}$$

$$\int_0^1 W_{3,r} f(x,y,z)\psi_{k,n}(z)\,dz = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{k,n}(z)\,dz =$$
$$= \left(C3_{k,n} f\right)(x,y), \quad k=\overline{0,r},\ n=\overline{0,2^k-1}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Оператор $W_{p,q,r} f(x,y,z)$ має такі властивості:*

1) $$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x,y,z)\,dx = \int_0^1 f(x,y,z)\,dx = (C1_{00} f)(y,z) \tag{7}$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x,y,z)\,dy = \int_0^1 f(x,y,z)\,dy = (C2_{00} f)(x,z) \tag{8}$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x,y,z)\,dz = \int_0^1 f(x,y,z)\,dz = (C3_{00} f)(x,y) \tag{9}$$

2) $$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx =$$
$$= \left(C1_{i,l} f\right)(y,z), \quad i=\overline{0,p},\ l=\overline{0,2^i-1}, \tag{10}$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x,y,z)\psi_{j,m}(y)\,dy = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{j,m}(y)\,dy =$$
$$= \left(C2_{j,m} f\right)(x,z), \quad j=\overline{0,q},\ m=\overline{0,2^j-1}, \tag{11}$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x,y,z)\psi_{k,n}(z)\,dz = \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{k,n}(z)\,dz =$$

$$=\left(C3_{k,n}f\right)(x,y),\quad k=\overline{0,r},\ n=\overline{0,2^k-1}. \qquad (12)$$

Доведення. З означення операторів $W_{p,q,r}f$, а також з тверджень леми витікає, що:

$$\int_0^1 W_{p,q,r}f(x,y,z)\,dx=\int_0^1 W_{1,p}f(x,y,z)\,dx+\int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\,dx+\int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\,dx-$$

$$-\int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}f(x,y,z)\,dx-\int_0^1 W_{1,p}W_{3,r}f(x,y,z)\,dx-\int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\,dx+$$

$$+\int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\,dx=\int_0^1 f(x,y,z)\,dx+\cancel{\int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\,dx}+\cancel{\int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\,dx}-$$

$$-\cancel{\int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\,dx}-\cancel{\int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\,dx}-\cancel{\int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\,dx}+$$

$$+\cancel{\int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\,dx}=\int_0^1 f(x,y,z)\,dx=\left(C1_{00}f\right)(y,z),\quad \forall y,z\in[0,1].$$

Аналогічно:

$$\int_0^1 W_{p,q,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx=\int_0^1 W_{1,p}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx+\int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx+$$

$$+\int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx-\int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx-\int_0^1 W_{1,p}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx-$$

$$-\int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx+\int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx+\cancel{\int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx}+\cancel{\int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx}-$$

$$-\cancel{\int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx}-\cancel{\int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx}-$$

$$-\cancel{\int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx}+\cancel{\int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx}=$$

$$=\int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)\,dx=\left(C1_{i,l}f\right)(y,z),\quad \forall y,z\in[0,1].$$

Теорема 2. *Для похибки наближення функції* $f(x,y,z)\in C(D)$,

$D=[0,1]^3$ *операторами* $W_{p,q,r}f(x,y,z)$ *виконується співвідношення*

$$f(x,y,z)-W_{p,q,r}f(x,y,z)=\left(I-W_{p,q,r}\right)f(x,y,z)=R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f(x,y,z),$$

де I *– тотожній оператор,* $R_{1,p}=f-W_{1,p}f(x,y,z)$, $R_{2,q}=f-W_{2,q}f(x,y,z)$, $R_{3,r}=f-W_{3,r}f(x,y,z)$.

Доведення. Запишемо систему операторних рівностей:

$$f(x,y,z)-W_{p,q,r}f(x,y,z)=\left(I-W_{p,q,r}\right)f(x,y,z)=\left(I-W_{1,p}+W_{2,q}+W_{3,r}-\right.$$
$$\left.-W_{1,p}W_{2,q}-W_{1,p}W_{3,r}-W_{2,q}W_{3,r}+W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}\right)f(x,y,z)=\left(I-W_{1,p}\right)\left(I-W_{2,q}\right)\times$$
$$\left(I-W_{3,r}\right)=R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f(x,y,z).$$

Наслідок. *Отже, якщо* $R_{1,p}f=O(\varepsilon)$, $R_{2,q}f=O(\varepsilon)$, $R_{3,r}f=O(\varepsilon)$, *то* $R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f=O\left(\varepsilon^3\right)$.

Для порівняння зауважимо, що оператори класичної тривимірної вейвлет-апроксимації Хаара $W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)$ наближують функцію $f(x,y,z)$ з похибкою, яка має оцінку $R_{classic}=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0$.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані зі створенням операторів узагальненої тривимірної вейвлет-апроксимації, дослідженням їх апроксимативних властивостей, створенням швидких алгоритмів їх реалізації та дослідженням можливостей щодо їх впровадження у різноманітні галузі застосувань вейвлетів, які вимагають обробки багатовимірних залежностей.

Висновки. Таким чином, оператори класичної тривимірної вейвлет-апроксимації Хаара $W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)$ наближують функцію $f(x,y,z)$ з похибкою, яка має оцінку $R_{classic}=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0$. В той час як оператори тривимірної мішаної вейвлет-апроксимації $W_{p,q,r}f(x,y,z)$ наближують функцію трьох змінних з похибкою, яка має оцінку $R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f=O\left(\varepsilon^3\right)$, $\varepsilon\to 0$. Це дуже значна перевага запропонованих операторів над класичними схемами і може бути використана у багатьох застосуваннях теорії вейвлетів.

Список літератури: **1.** *Петухов А. П.* Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 132 с. **2.** *Столниц Э., Дероуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения.– Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с. **3.** *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – Москва: Триумф, 2003. – 320 с. **4.** *Яковлев А.* Основы вейвлет-преобразования сигналов. Серия «Конспекты лекций по радиотехническим дисциплинам», выпуск 10. – Москва: Физматлит, 2003. – 176 с. **5.** *Гудим*

В. В. Використання вейвлет-перетворень та нейронних мереж для обробки та покращання розпізнавання мовних сигналів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.12.13. Нац. ун-т "Львів. політехніка". – Л., 2003. – 20 с.: рис., табл. – укр. **6.** *Sweldens W.* The lifting scheme: a construction of second generation wavelets // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – Vol. 3(2). – P. 186 – 200. **7.** *Стаховский И. Р.* Вейвлетный анализ временных сейсмических рядов // ДАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 393 – 396. **8.** *DeVore R., Jawerth W., Lucier B.* Image compression through wavelet transform coding // IEEE Trans. on Information Theory. – 1992. – Vol. 39(2). – P. 719 – 746. **9.** *Захаров В. Г.* Разработка и применение методов вейвлет-анализа к нелинейным гидродинамическим системам. Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.05. – Пермь, 1997. **10.** *Дьяконов В. П.* Настольная книга пользователя Internet. – М.: Изд-во "СОЛОН-Пресс", 2000. – 640 с. **11.** *Воробьев В. И., Грибунин В. Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – Санкт-Петербург: Изд-во Воен. ун-та связи, 1999. – 204 с. **12.** *Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V.* Fast wavelet transforms and numerical algorithms // Comm. on Pure and Appl. Math. – 1991. – Vol. 44. – P. 141 – 183. **13.** *Задирака В. К., Абдикаликов К. А.* Быстрые ортогональные преобразования: теория и приложения. – Алматы: Научно издательский центр «Ғылым», 2003. – 220 с. **14.** *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с. **15.** *Ronald A. DeVore, Björn Jawerth, Vasil Popov.* Compression of wavelet decompositions // Amer. J. Math. – 1992. – Vol. 114. – P. 737 – 785. **16.** *Stephane G. Mallat.* A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. – 1989. – Vol. 11. – P. 674 – 693. **17.** *Y. Meyer*. Ondelettes, fonctions splines et analyses graduees [Wavelets, Spline functions, and multiresolution analysis]. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. – 1987. – Vol. 45. – P. 1-42. Translated by John Horvath. **18.** *Y. Meyer.* Wavelets with compact support // Zygmund Lectures. U. Chicago. – 1987. **19.** *Cohen A.* Ondelettes, analysis multiresolutions et filtres mirroirs en quadrature // Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1990. – Vol. 7. – P. 439 – 459. **20.** *Lawton Wayne M.* Tight frames of compactly supported affine wavelets // J. Math. Phys. – 1990. – Vol. 31. – P. 1898 – 1901. **21.** *Ingrid Daubechies.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. – 1988. – Vol. 41. – P. 909 – 996. **22.** *Karlheinz Gröchenig.* Analyse multi-échele et bases d'ondelettes [Multiscale analyses and wavelet bases]. // C.R. Acad. Sci. Paris Série I. – 1987. – Vol. 305. – P. 13 – 17.. Translated by Robert D. Ryan. **23.** *Jelena Kovačevič* and *Martin Vetterli*. Nonseparable multidimentional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n. // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1992. – Vol. 38. – P. 533 – 555. **24.** *K. Gröchenig* and *W. R Madych*. Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of R^n // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1992. – Vol. 38. – P. 556 – 568. **25.** Fundamental Papers in Wavelet Theory / Edited by *Christopher Heil* and *David F. Walnut.* Princeton University Press. 2006. – 878 p. **26.** Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. **27.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Узагальнені оператори Хаара, побудовані на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара // Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів. – Київ: Видання Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем, 2004. – С. 297 – 300. **28.** *Lytvyn O., Kulyk. S.* Bivariate Wavelet Sums, Constructed on the Basis of Haar Blending Approximation and Experimental Data // Управляющие системы и машины. – 2008. – №3. – С. 53 –59. **29.** *Литвин О. Н., Кулик С. И.* Некоторые аспекты быстрого вычисления смешанных сумм Хаара // Компьютерная математика. – 2008. – №2. – С. 83 – 95. **30.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Використання мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами у стискуванні інформації // Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів. – Київ: Видання Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем, 2006. – С. 155 – 158. **31.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // Проблеми машинобудування. – 2008. – Т.11, №2. – С. 56 – 65.

Надійшла до редколегії 15.12.2011